

並列有限要素法による 三次元定常熱伝導解析プログラム (1/2)

中島 研吾
東京大学情報基盤センター

RIKEN AICS HPC Spring School 2014

扱うプログラム

- fem3dの並列版
- MPIによる並列化

- プログラムのインストール
- 実行
 - 並列有限要素法の手順
 - 領域分割とは？
 - 本当の実行
- データ構造

ファイルコピー on FX10

FORTRANユーザー

```
>$ cd <$O-TOP>
```

```
>$ cp /home/ss/aics60/2014SpringSchool/F/fem3d.tar .
```

```
>$ tar xvf fem3d.tar
```

Cユーザー

```
>$ cd <$O-TOP>
```

```
>$ cp /home/ss/aics60/2014SpringSchool/C/fem3d.tar .
```

```
>$ tar xvf fem3d.tar
```

ディレクトリ確認

```
>$ ls
```

```
mpi fem3d pfem3d
```

```
>$ cd pfem3d
```

※<\$O-TOP>/fem3dには非並列版

コンパイル

メッシュジェネレータ

```
>$ cd <$O-TOP>/pfem3d/mesh  
>$ frtpx -Kfast mgcube.f -o mgcube
```

領域分割機能

```
>$ cd <$O-TOP>/pfem3d/part  
>$ make  
>$ ls ../mesh/part  
part
```

計算本体

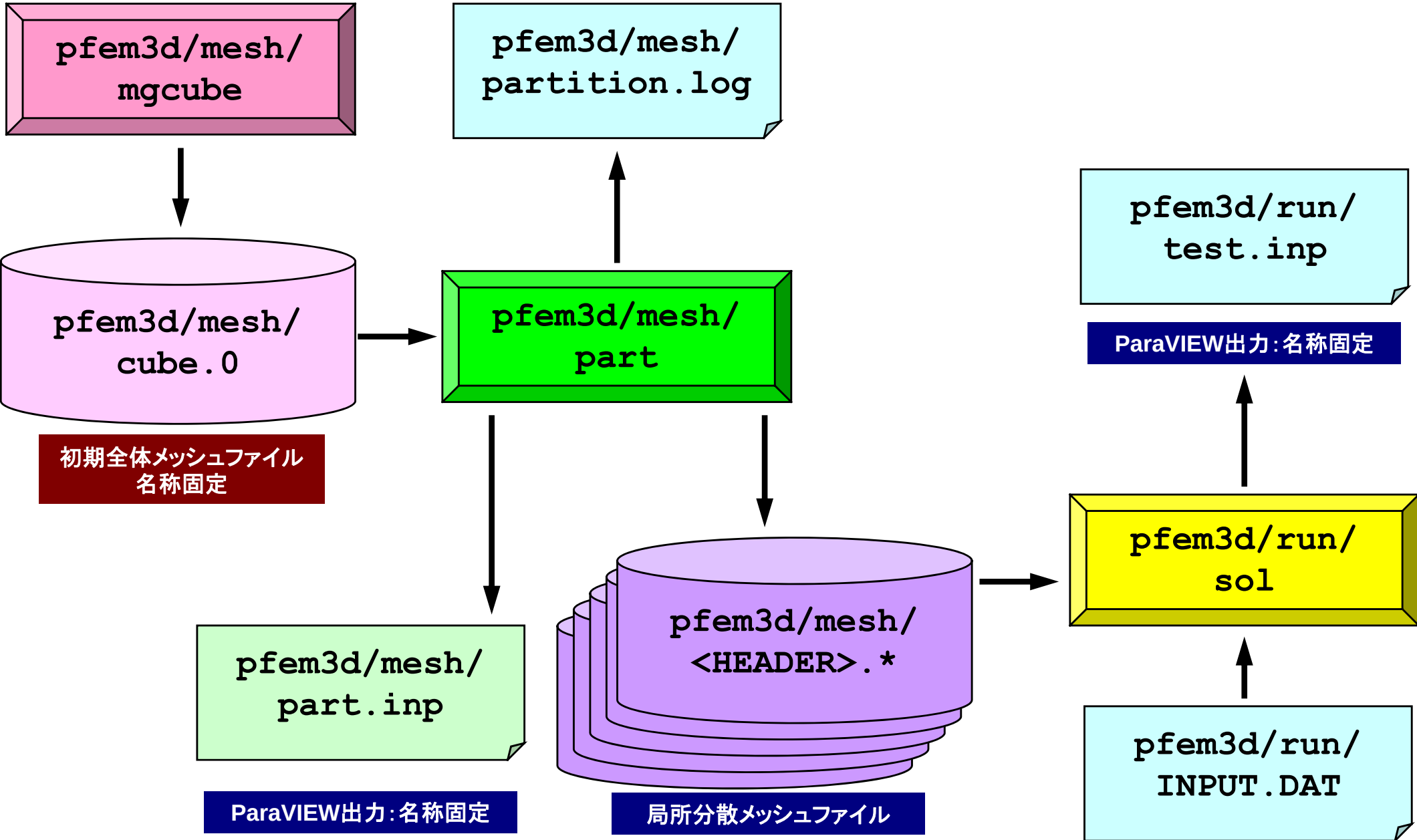
```
>$ cd <$O-TOP>/pfem3d/src  
>$ make  
>$ ls ../run/sol  
sol
```

- プログラムのインストール
- 実行
 - 並列有限要素法の手順
 - 領域分割とは？
 - 本当の実行
- データ構造

並列有限要素法の手順

- 初期全体メッシュファイルを作成する
 - `<$O-TOP>/pfem3d/mesh/mg.sh`
- 領域を分割する(局所分散メッシュファイル)
 - `<$O-TOP>/pfem3d/mesh/part_XXX.sh`
- 計算を実施する
 - `<$O-TOP>/pfem3d/run/go.sh`

並列有限要素法の手順



- プログラムのインストール
- 実行
 - 並列有限要素法の手順
 - 領域分割とは?
 - 本当の実行
- データ構造

領域分割機能: Partitioner

初期全体メッシュデータを与えることによって,
自動的に局所分散メッシュデータを生成する
一次元⇒プログラム内で実行, 三次元⇒困難

- 内点, 外点
 - 局所分散メッシュデータ
 - 内点～外点となるように局所番号をつける
- 通信テーブル
 - 隣接領域情報
 - 隣接領域数
 - 隣接領域番号
 - 外点情報
 - どの領域から, 何個の, どの外点の情報を「import」するか
 - 境界点情報
 - 何個の, どの境界点の情報を, どの領域に「export」するか

Partitioning とは？

- Graph/Graphic Partitioningの略
- 並列計算のための領域分割を実現するための手法
- 1PEでは計算できないような巨大な全体領域を局所データに分割する

Graph/Graphic Partitioning とは？

Graph/Graphic Partitioningとは「グラフ」（*graphs* : 節点と辺の集合）に関する「グラフ理論」を並列計算における領域分割に応用した手法である

一筆書き，四色問題

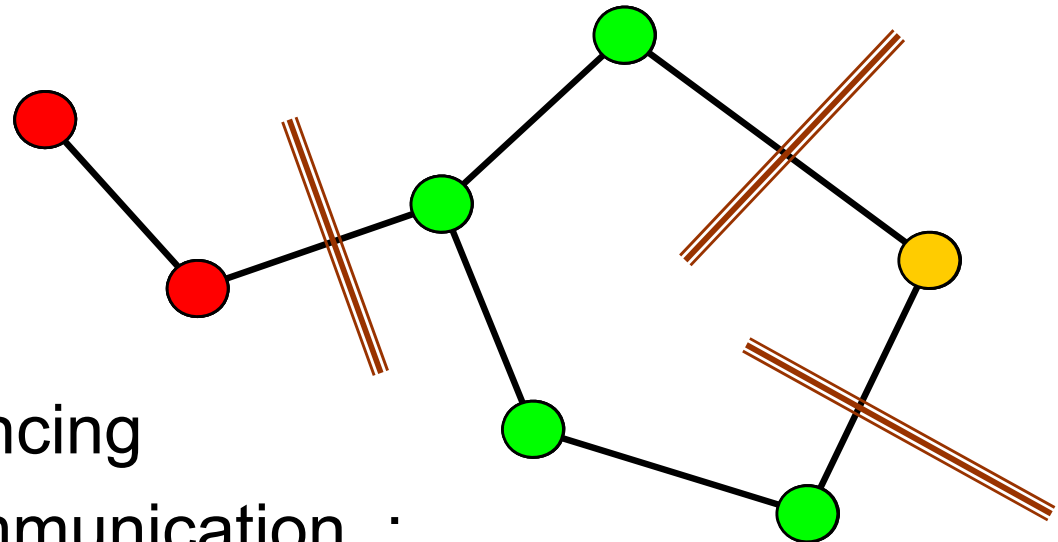
良い領域分割

領域間の負荷均等 : Load balancing

領域間通信量最小 : Small Communication :

前処理つき反復法の収束に影響

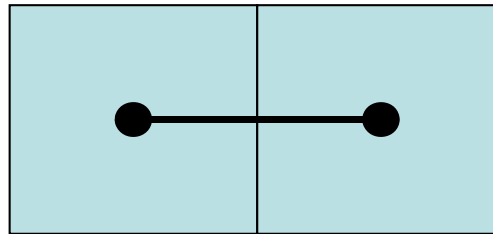
隣接領域数最小



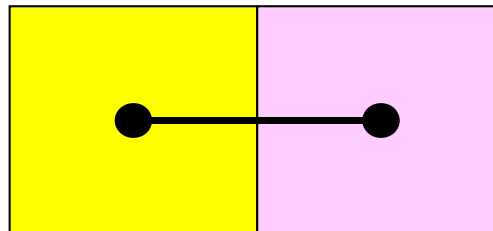
EDGE-CUTとは？

- 辺の両端の節点（または要素）が異なった領域に属している場合、「EDGE-CUTが生じている。」という。
- EDGE-CUTが少ないほど、通信は少ない。

EDGE-CUT無し



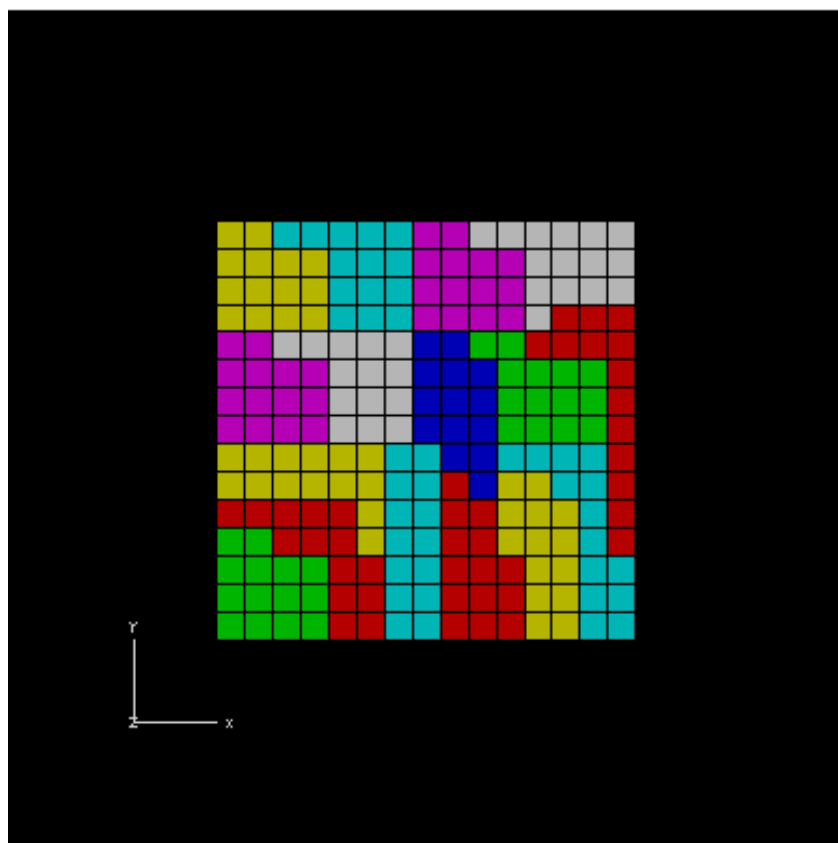
EDGE-CUT有り



Partitioning の反復法収束への影響

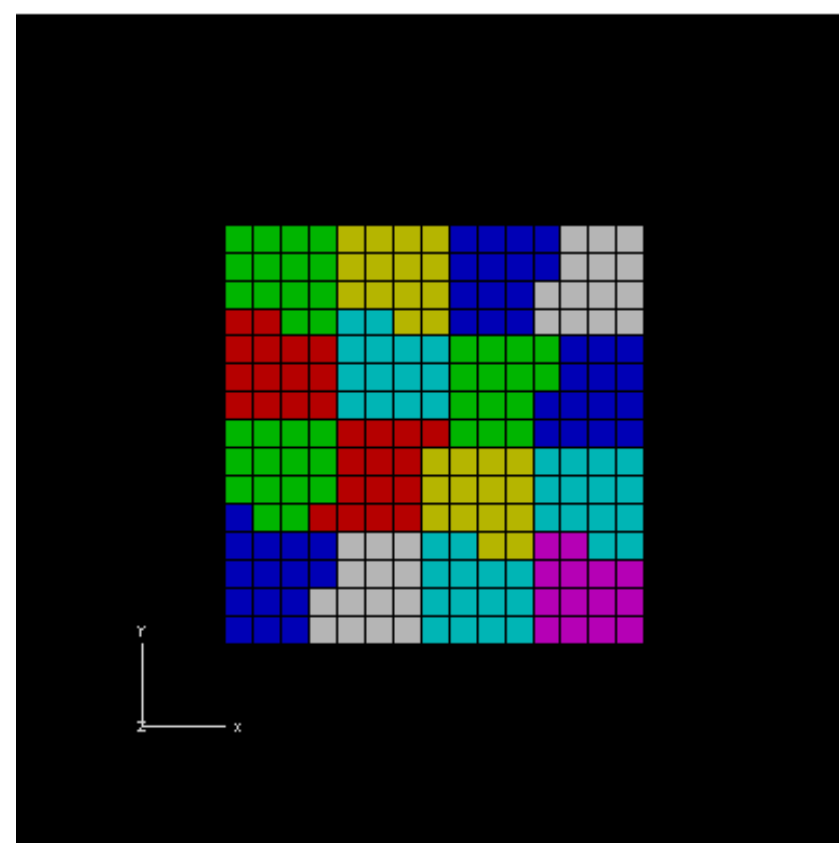
15 × 15領域を16分割：負荷バランスは取れている

Edge-Cut多い



RGB

Edge-Cut少ない



RSB

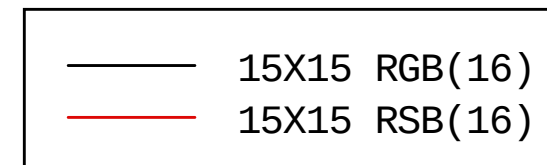
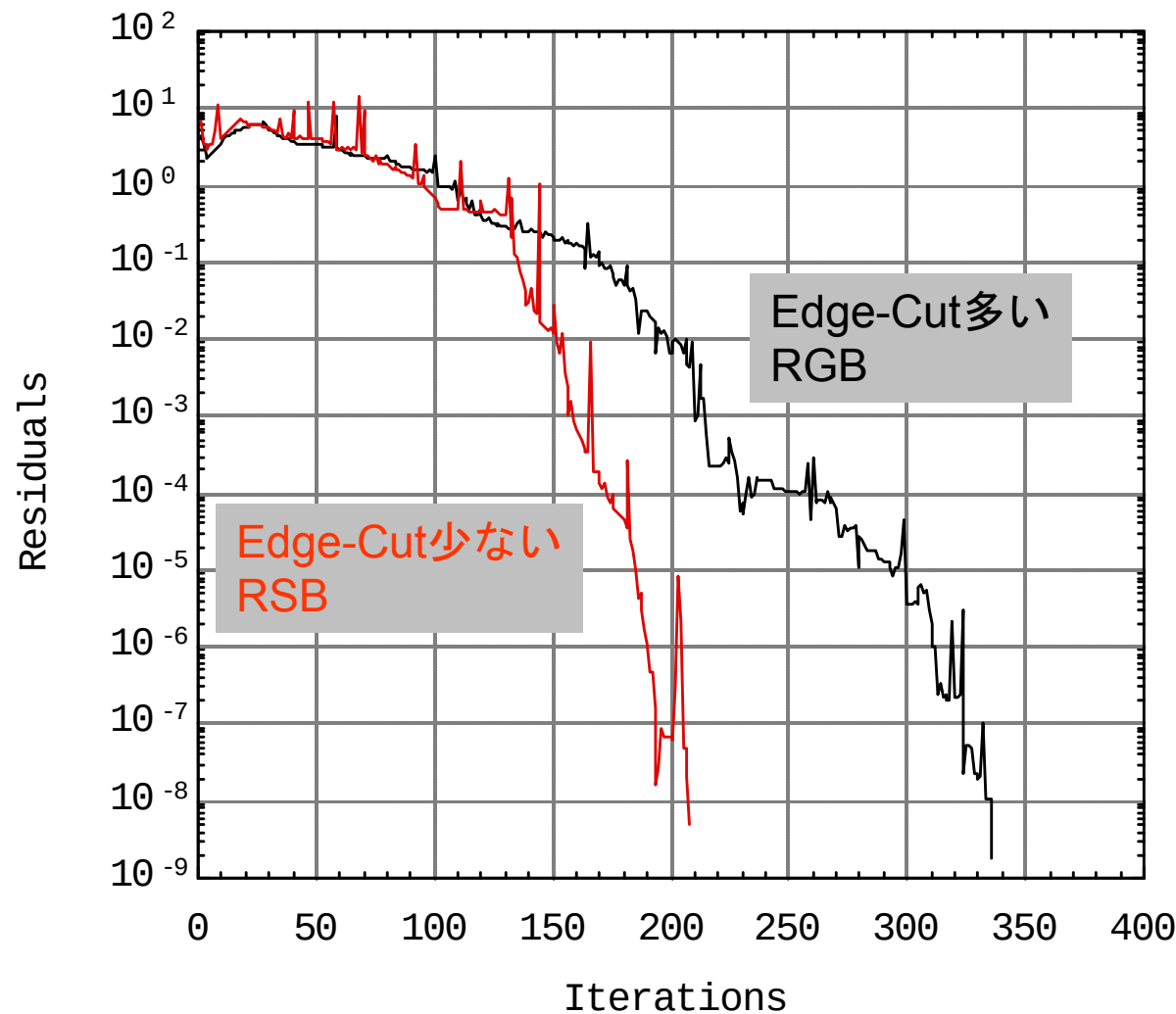
Partitioning の反復法収束への影響

BiCGSTAB with Localized ILU(0) Preconditioning

15X15 region, RGB/RSB for 16 PE's , Poisson eqn's

Edge-Cutが少ないほど（通信が少ないほど）収束は速い

今回は前処理が対角スケーリングなので無関係だが



	RGB	RSB
Neighboring PEs (Ave., max)	3.63, 7	3.63, 6
Boundary Edges (Ave, max)	15.1, 19	12.5, 18

1996年2月頃
やった計算

Partitioning手法

- 嘗ては多くの研究グループがあったが今は, **MeTiS**(ミネソタ大学)と**JOSTLE**(グリニッジ大学)にほぼ集約
- **MeTiS**: Univ.Minnesota
 - <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/>
- **JOSTLE**: Univ.Greenwich
 - <http://staffweb.cms.gre.ac.uk/~c.walshaw/jostle/>
- **Scotch/PT-Scotch**: 比較的最近
 - <http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/>

<SO-TOP>/pfem3d/mesh/part

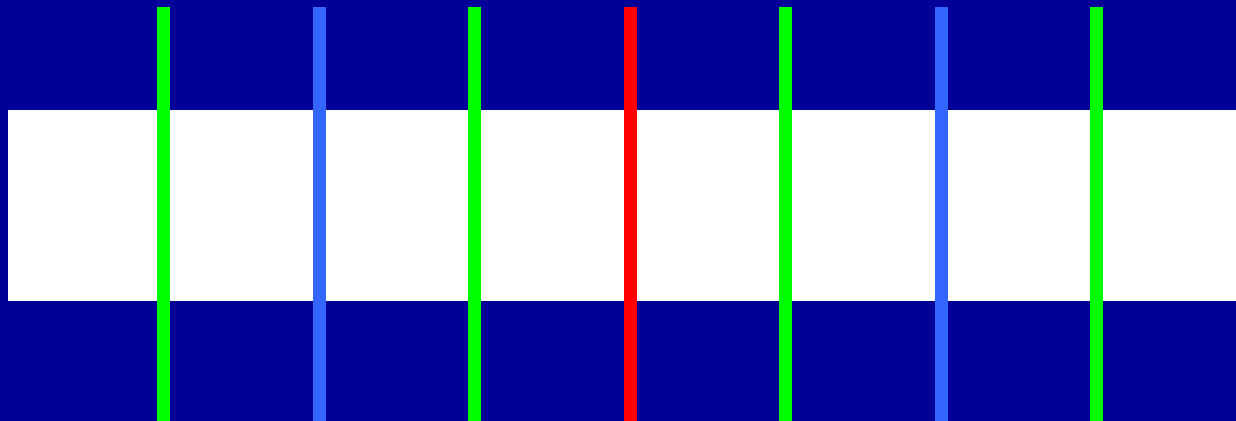
- 初期全体メッシュデータを対象とした簡易ツール
 - シリアル処理
- 初期全体メッシュデータを入力として，局所分散メッシュデータ，通信情報を出力する。
- 分割手法
 - RCB（Recursive Coordinate Bisection）法
 - METIS
 - kmetis 領域間通信最小（edge-cut最小）
 - pmetis 領域間バランス最適化

RCB法

Recursive Coordinate Bisection

H.D.Simon "Partitioning of unstructured problems for parallel processing", Comp. Sys. in Eng., Vol.2, 1991.

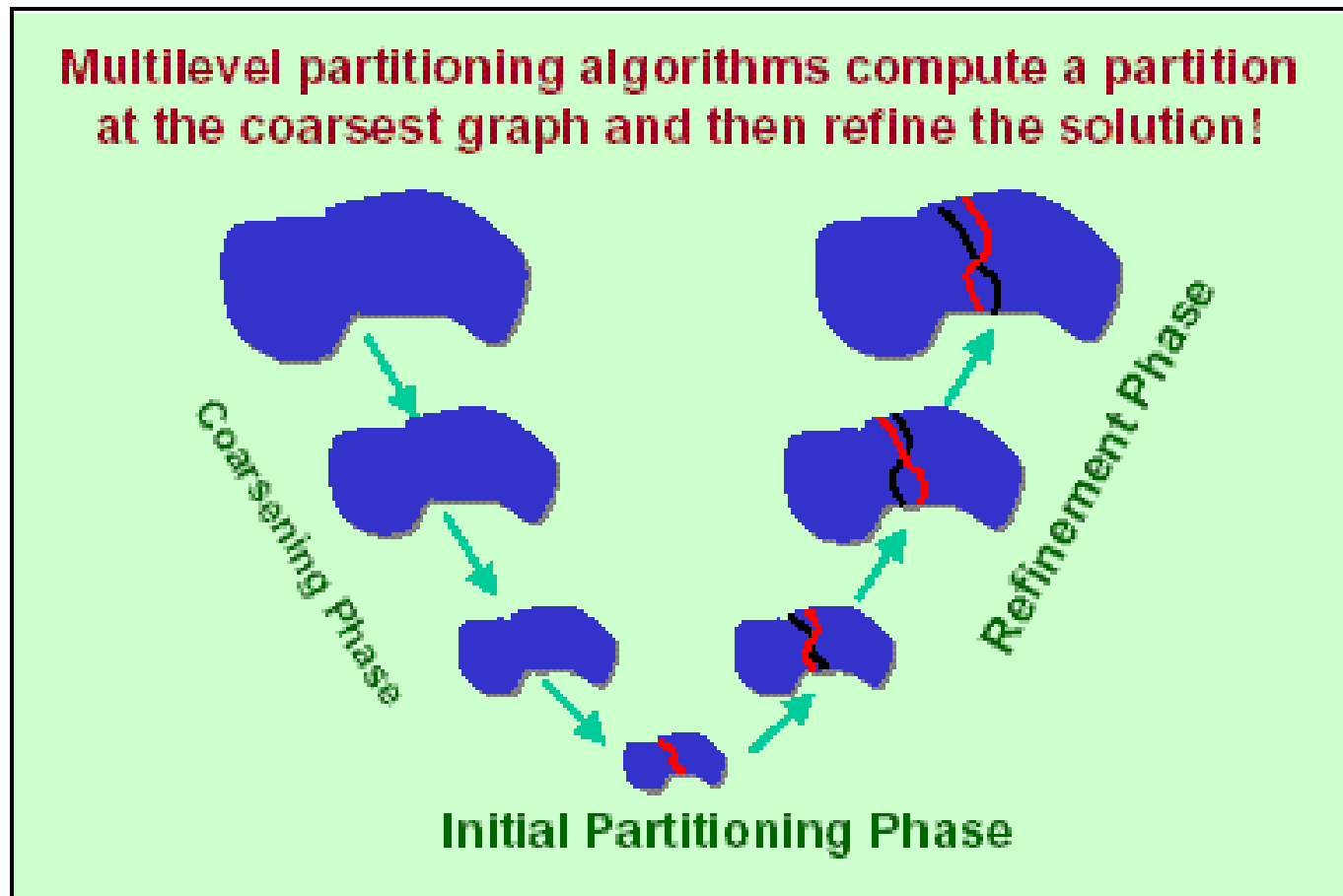
- XYZ座標成分の大小をとりながら分割
- 分割基準軸は形状に応じて任意に選択できる
- たとえば細長い形状では同じ方向への分割を続ける
- 2^n 領域の分割しかできない
- 高速, 簡易形状ではMETISより良い



MeTiS

<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/>

- マルチレベルグラフ理論に基づいた方法



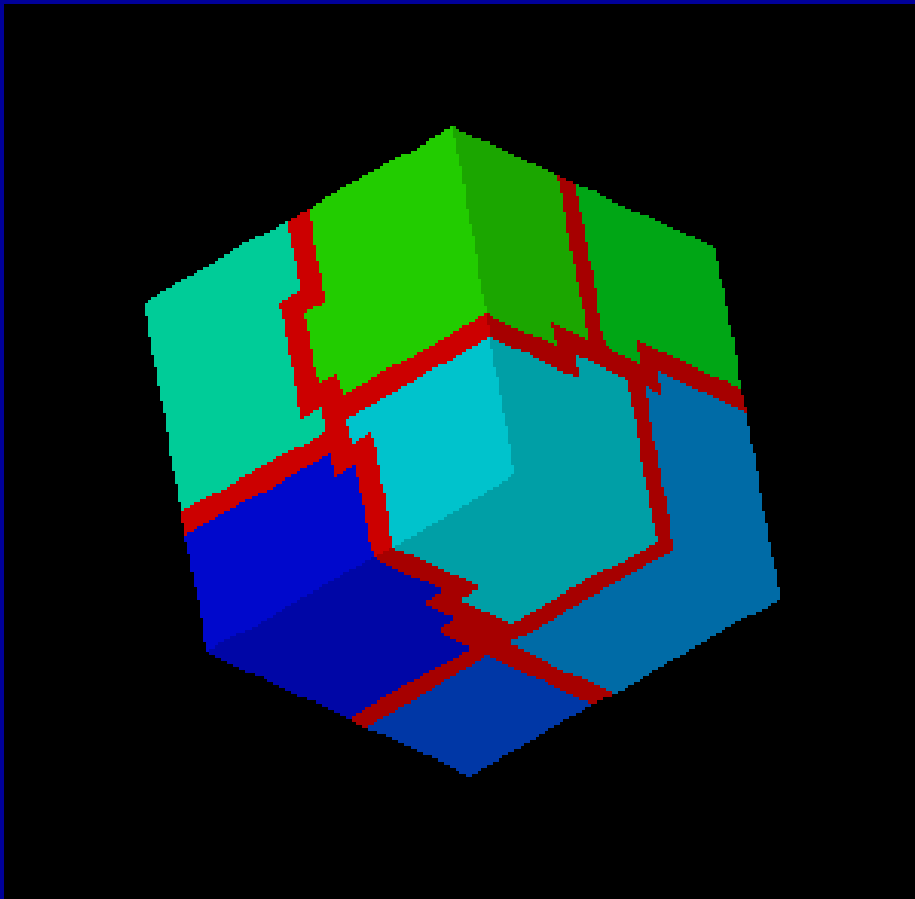
MeTiS

<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/>

- マルチレベルグラフ理論に基づいた方法
 - 特に通信 (edge-cut) が少ない分割を提供する
 - 安定, 高速
 - フリーウェア, 他のプログラムに組み込むことも容易
- 色々な種類がある
 - k-METIS 通信量 (edge-cut) 最小
 - p-METIS 領域間バランス最適化
 - ParMETIS 並列版
 - 領域分割だけでなく, オーダリング, データマイニングなど色々な分野に使用されている
 - 接触, 衝突問題における並列接触面探索

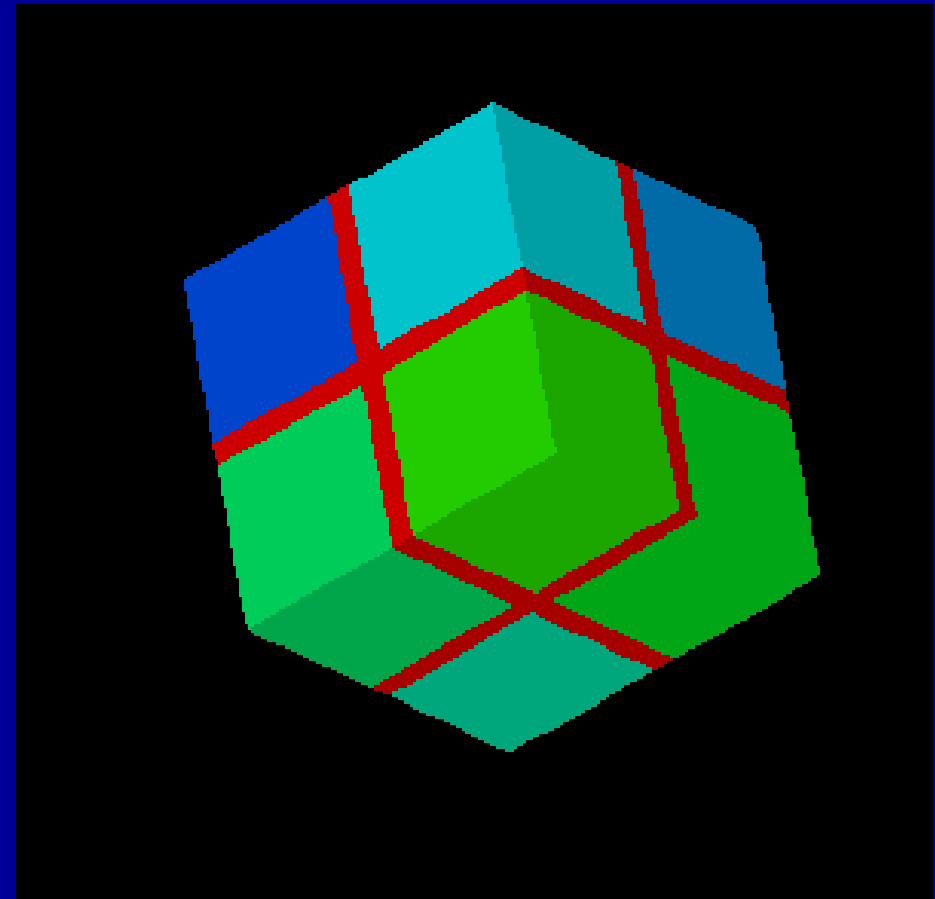
領域分割例：立方体領域：8分割

3,375要素 ($=15^3$), 4,096節点
単純な形状ではむしろRCBが良い



k-MeTiS

edgecut = 882



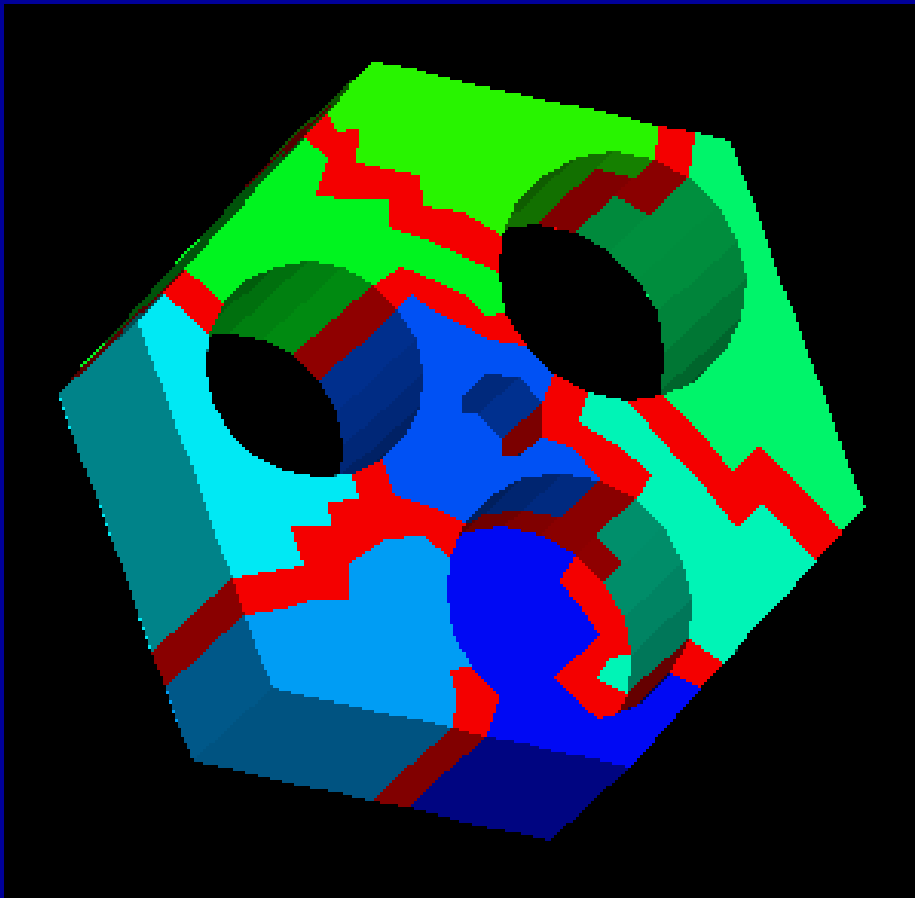
RCB

edgecut = 768

領域分割例：黒鉛ブロック：8分割

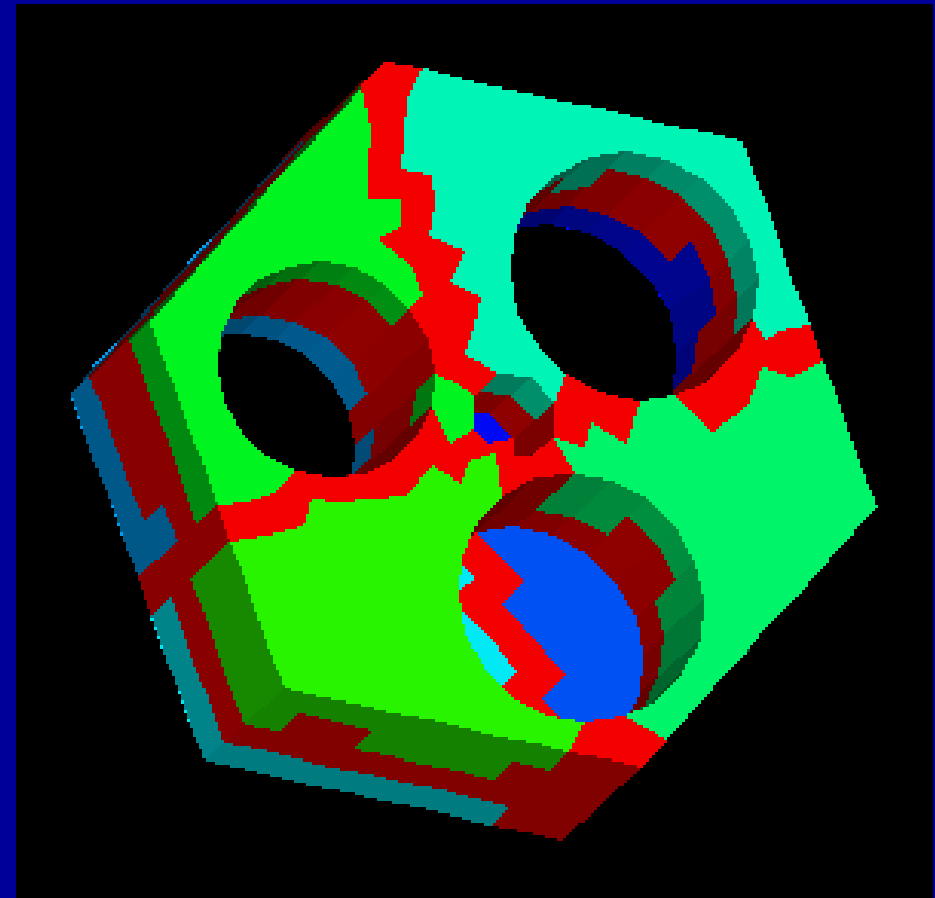
795要素, 1,308節点

複雑形状ではMeTiSが良い：Overlap領域細い



k-MeTiS

edgecut = 307



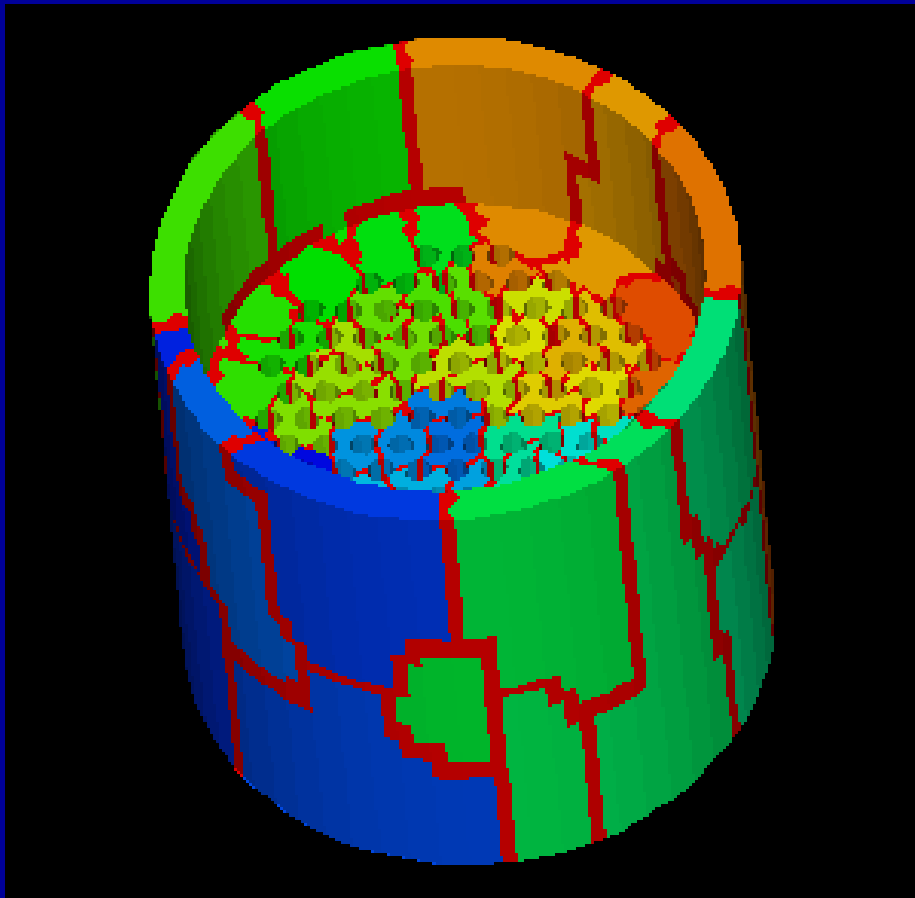
RCB

edgecut = 614

領域分割例：管板：64分割

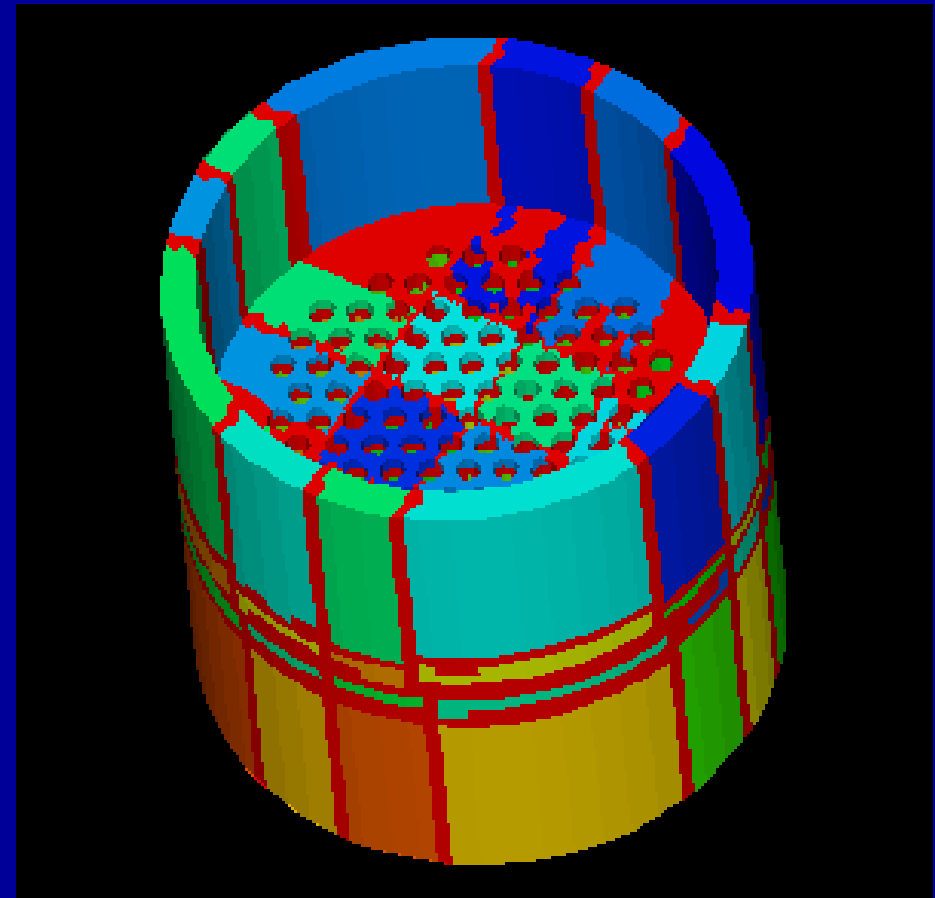
40,416要素, 54,084節点

複雑形状ではMeTiSが良い：EdgeCut少ない



k-MeTiS

edgecut = 9,489



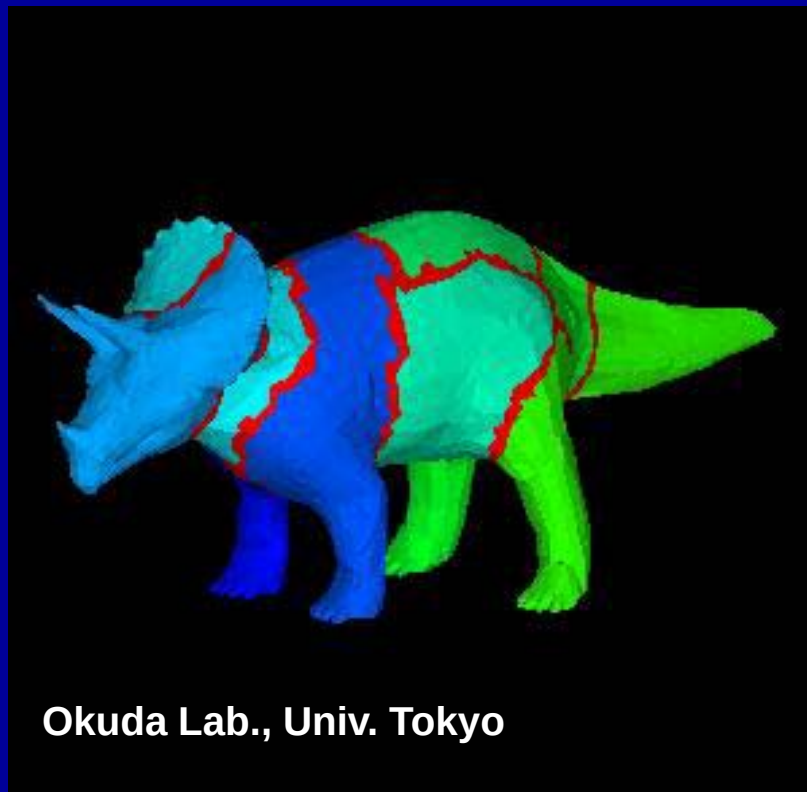
RCB

edgecut = 28,320

Strange Animal in 8 PEs

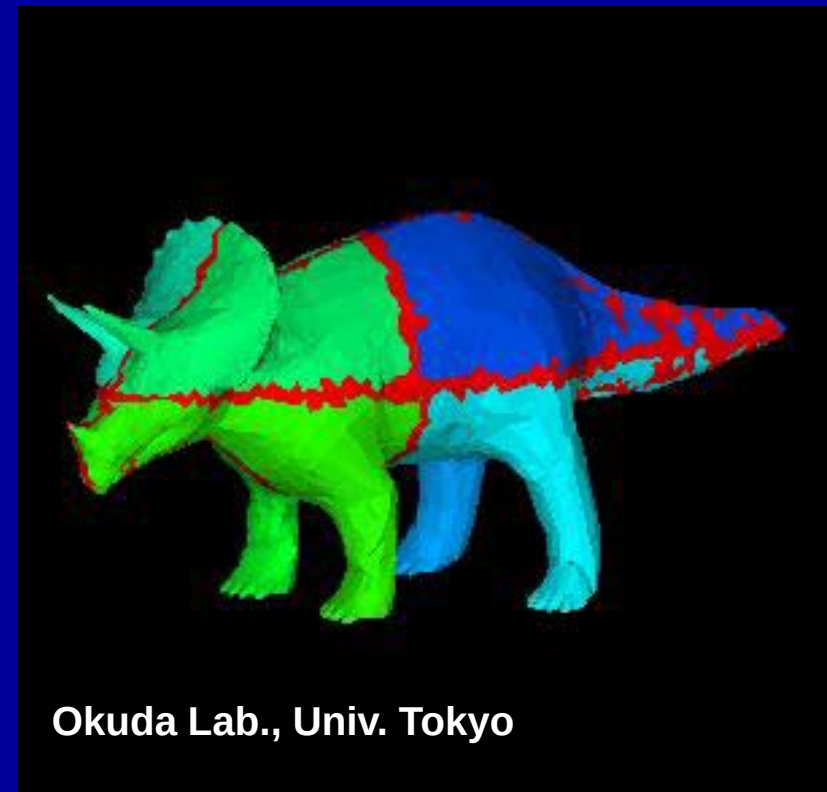
53,510 elements, 11,749 nodes.

METIS is better for complicated geometries.



Okuda Lab., Univ. Tokyo

k-METIS
edgcut = 4,573



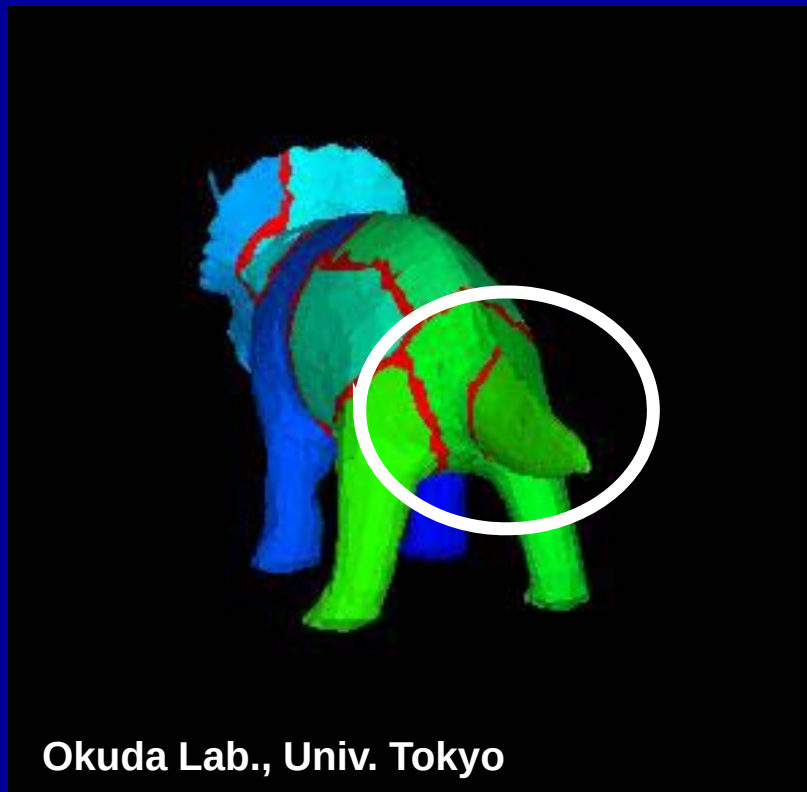
Okuda Lab., Univ. Tokyo

RCB
edgcut = 7,898

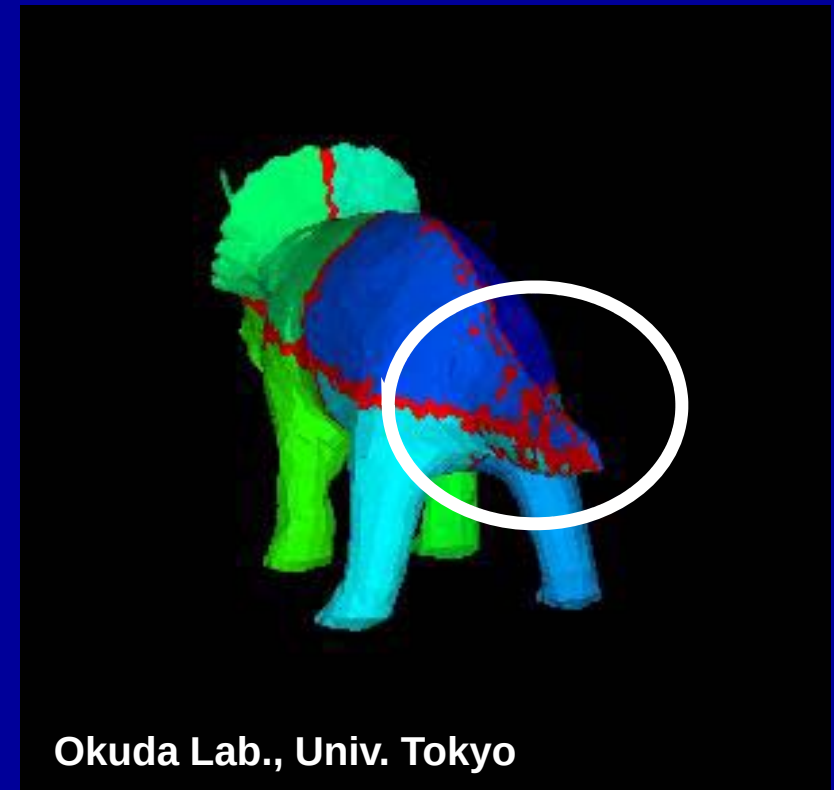
Strange Animal in 8 PEs

53,510 elements, 11,749 nodes.

METIS is better for complicated geometries.



k-METIS
edgcut = 4,573



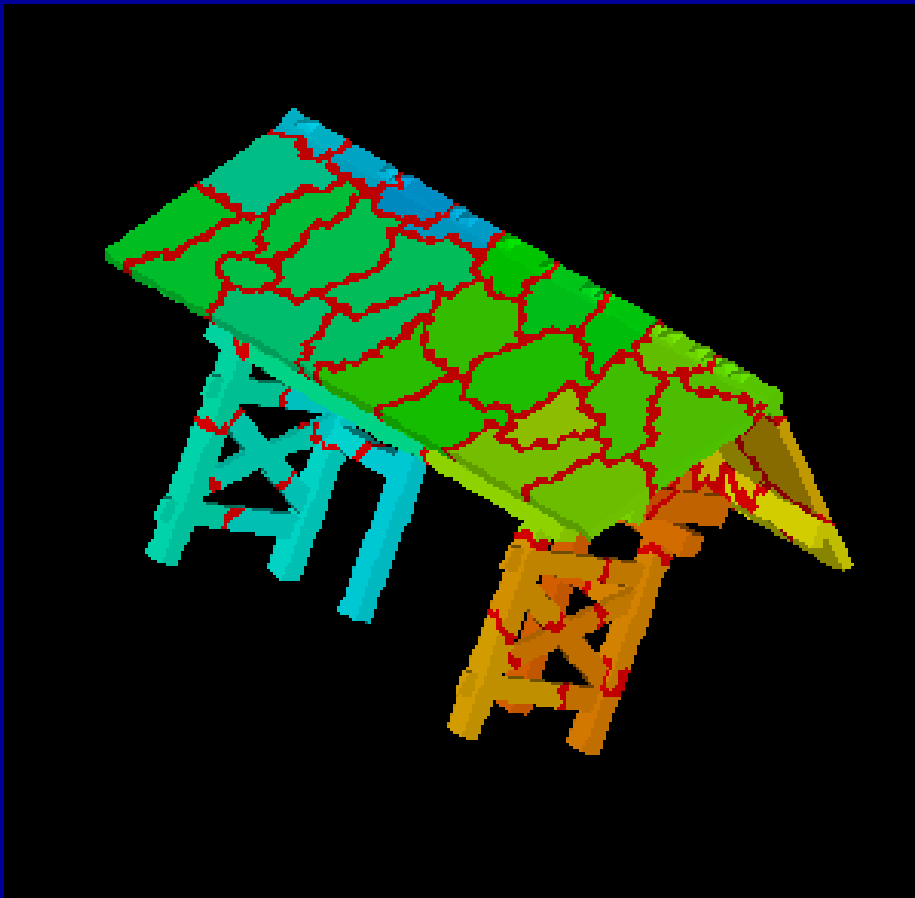
RCB
edgcut = 7,898

領域分割例：東大赤門：64分割

[movie](#)

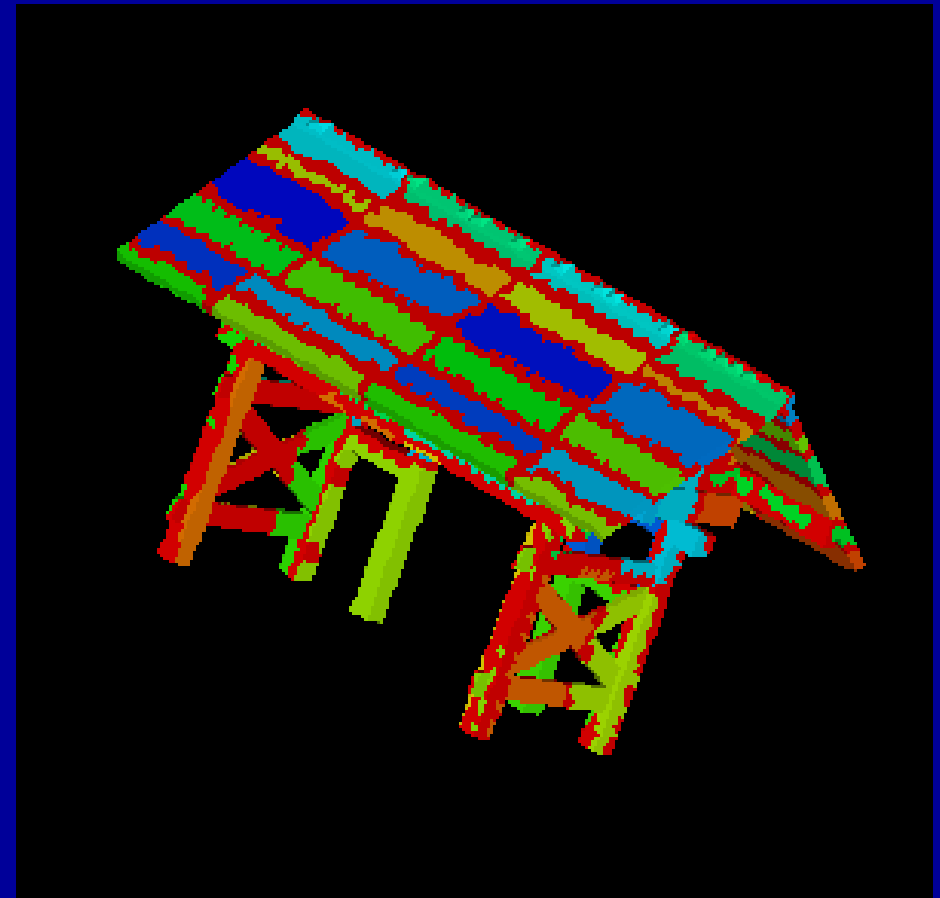
40,624要素, 54,659節点

複雑形状ではMeTiSが良い：EdgeCut少ない



k-MeTiS

edgecut = 7,563

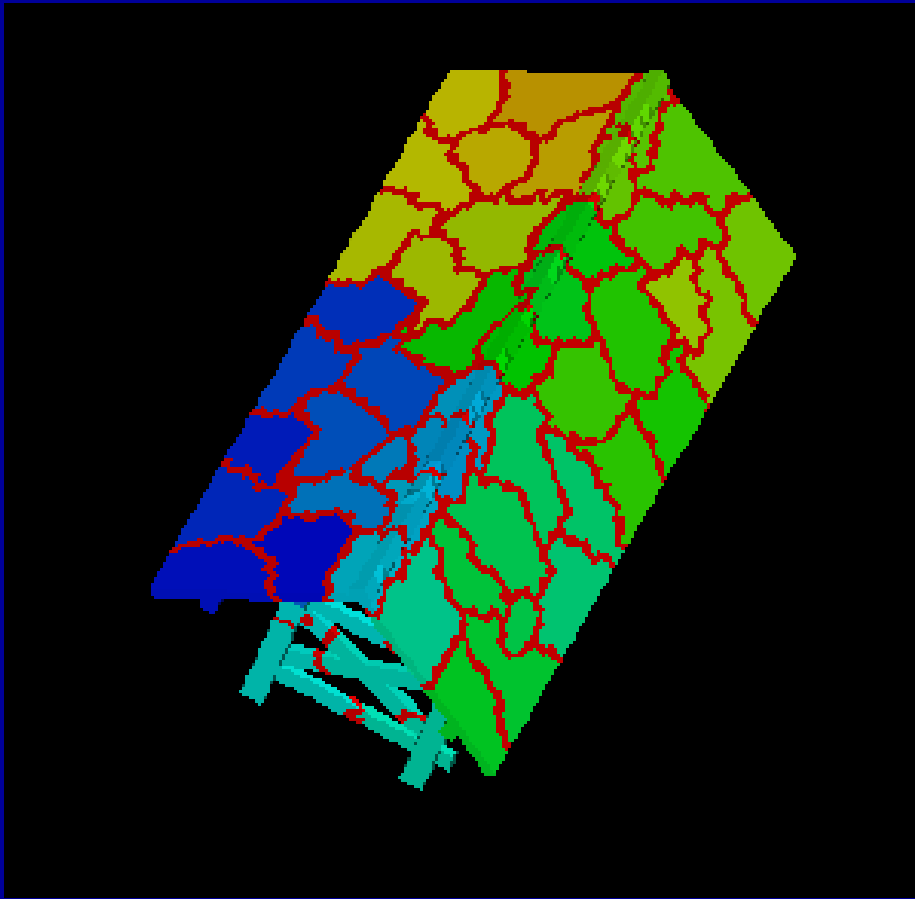


RCB

edgecut = 18,624

領域分割例：東大赤門：64分割

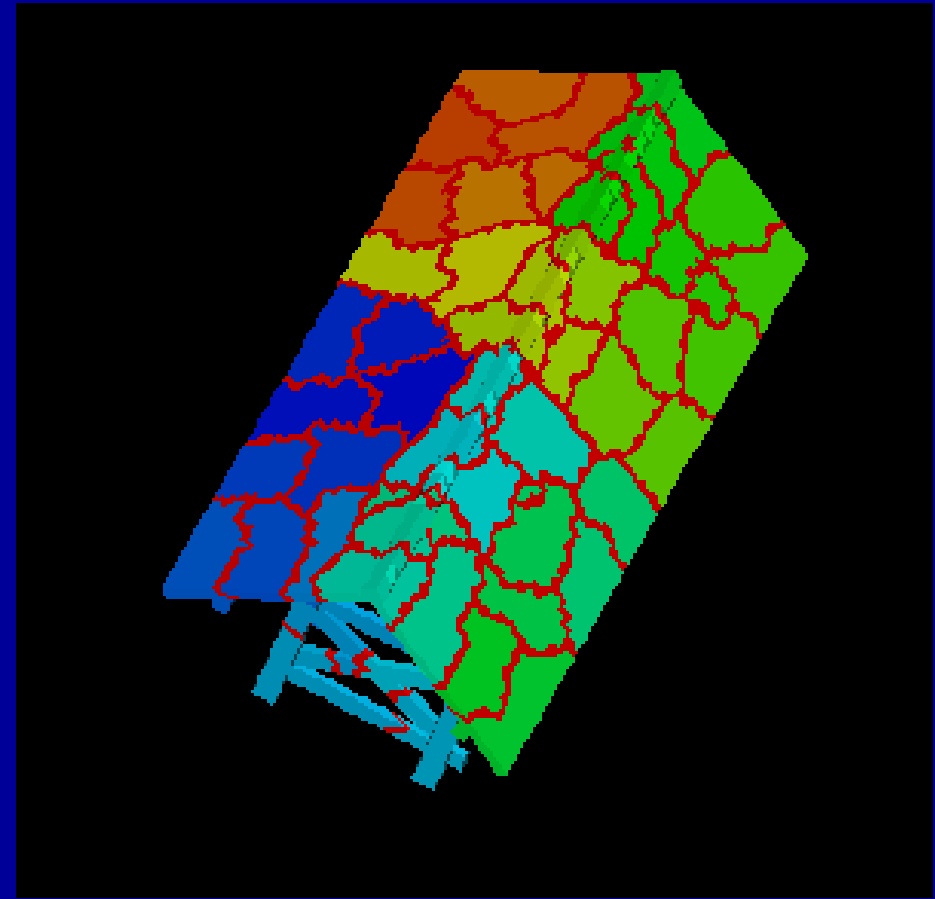
40,624要素, 54,659節点



k-METIS

Load Balance= 1.03

edgecut = 7,563

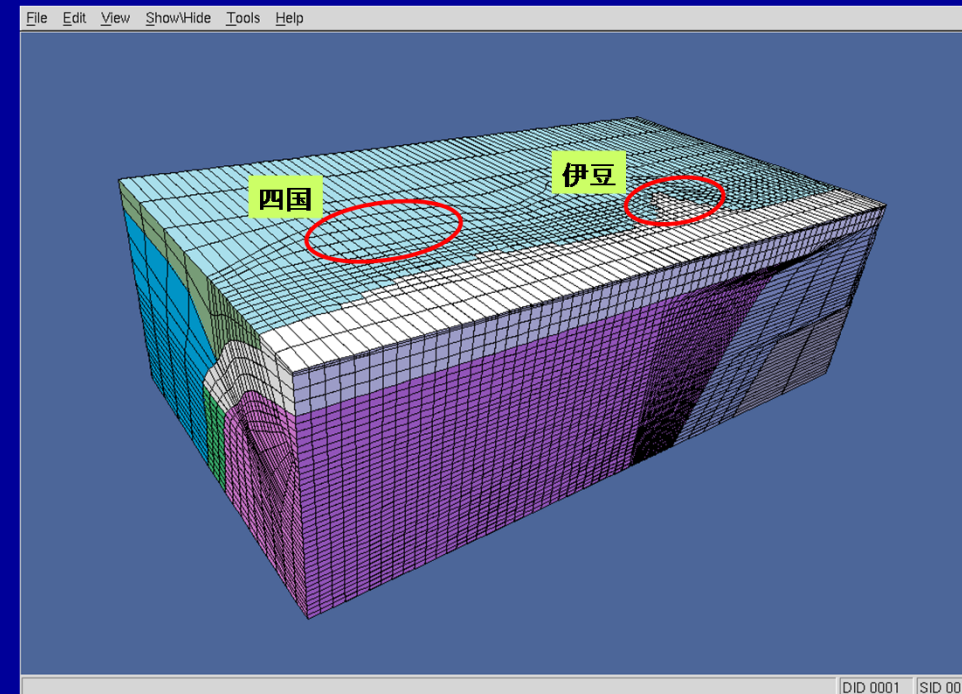
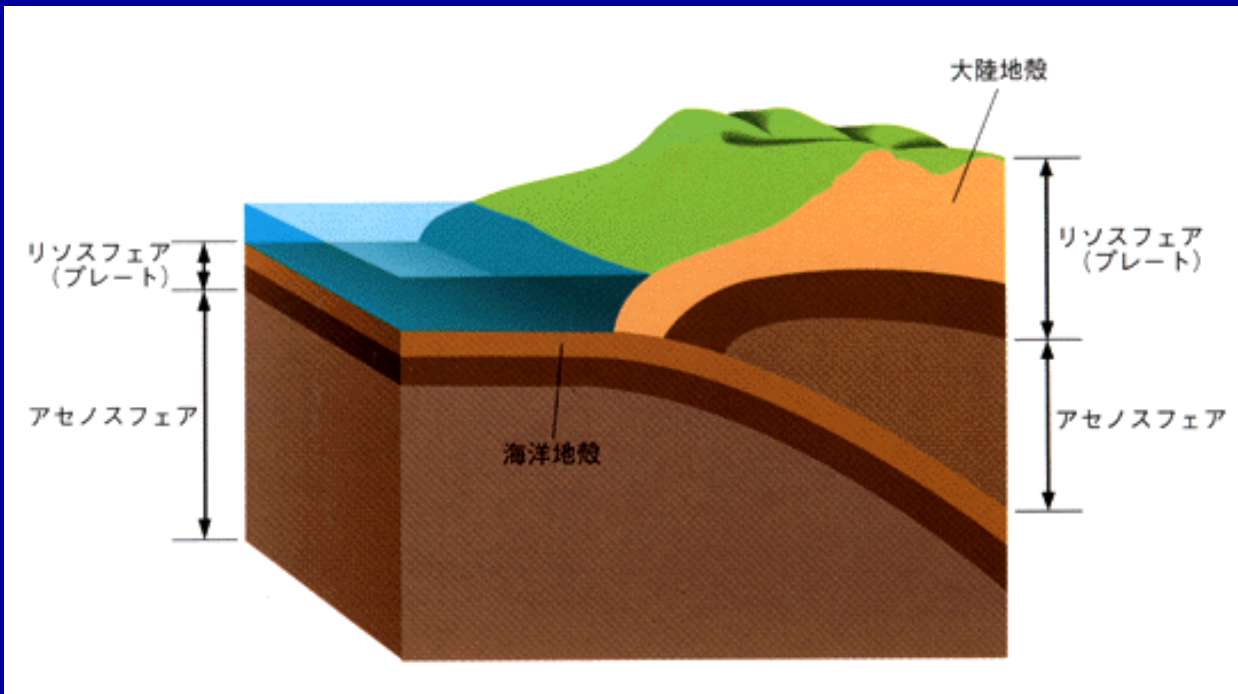


p-METIS

Load Balance= 1.00

edgecut = 7,738

領域分割例： 西南日本

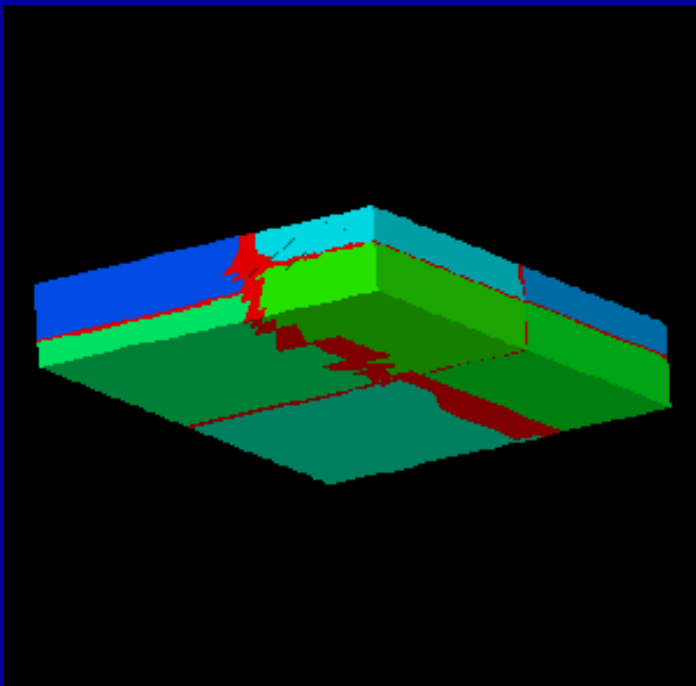
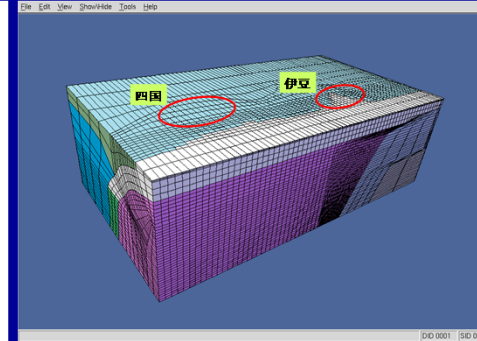
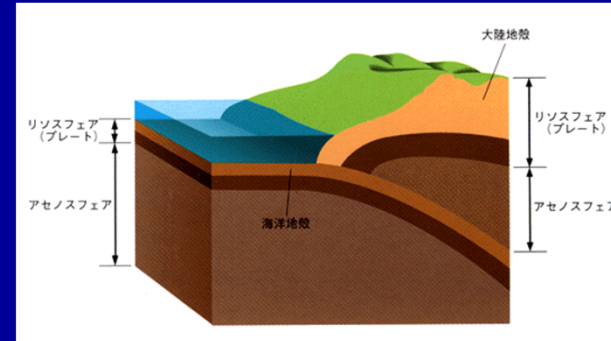


領域分割例：

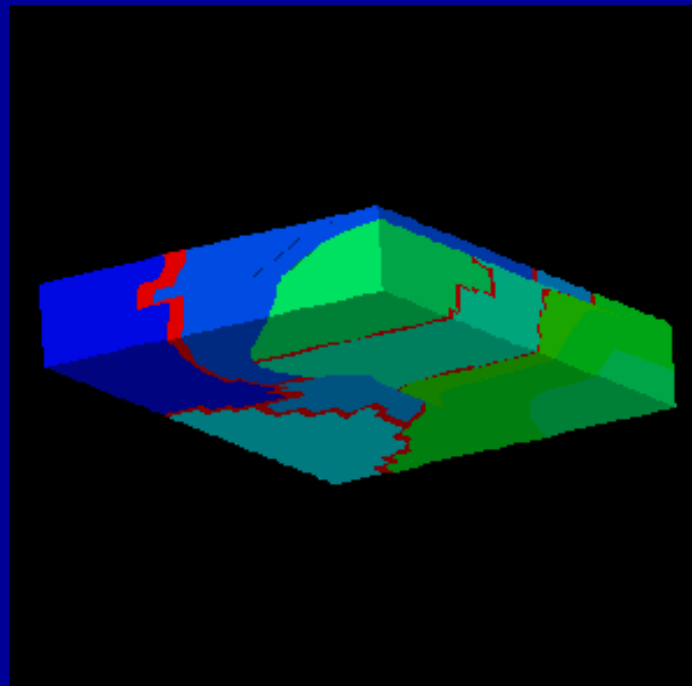
西南日本：8分割

57,205要素, 58,544節点

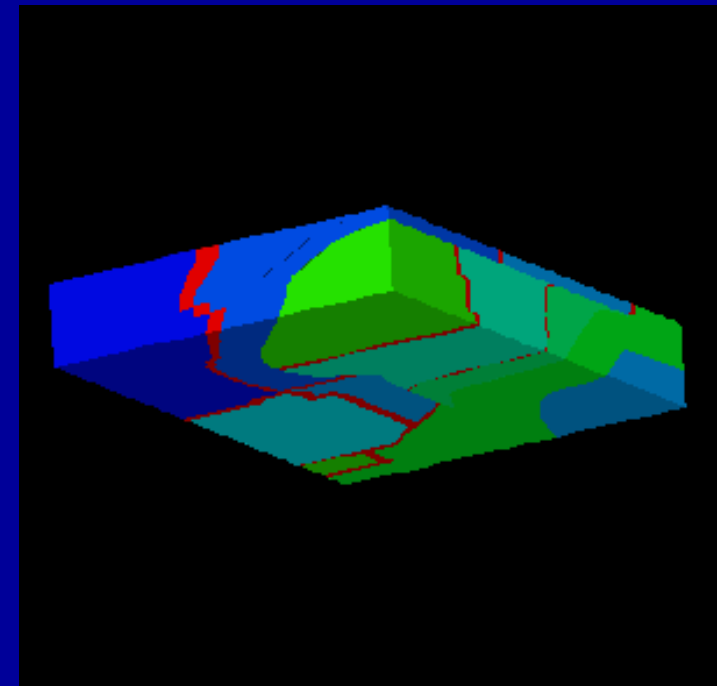
movie



RCB e.c.=7433



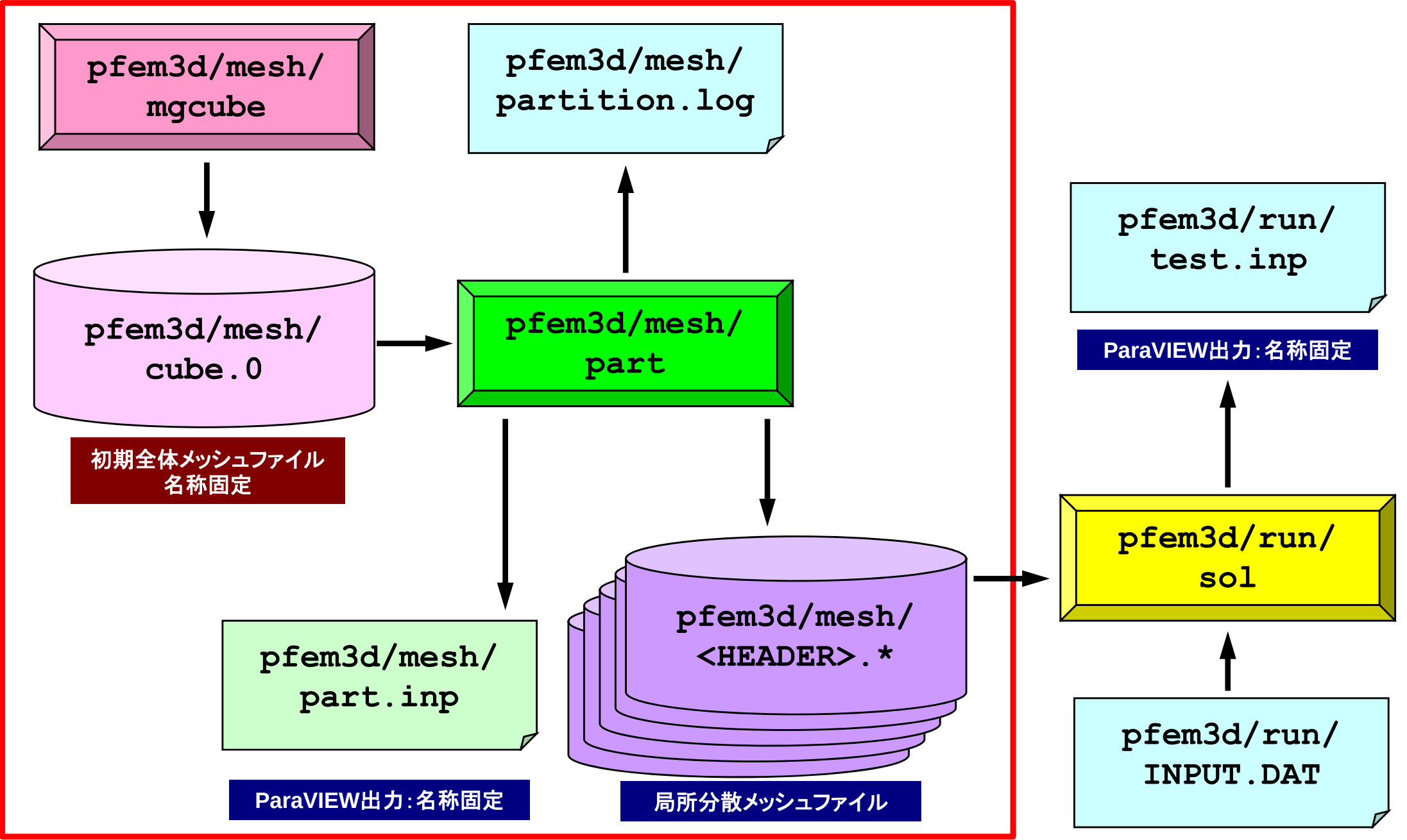
k-METIS :4,221



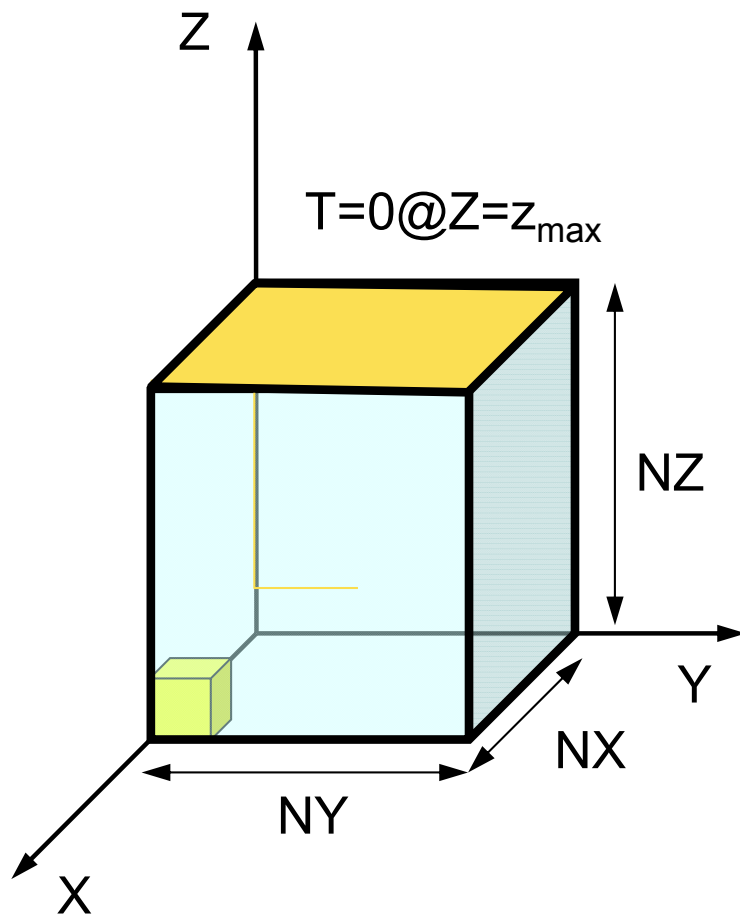
p-METIS :3,672

- プログラムのインストール
- 実行
 - 並列有限要素法の手順
 - 領域分割とは？
 - 本当の実行
- データ構造

並列有限要素法の手順



初期全体メッシュ生成



```
>$ cd <$O-TOP>/pfem3d/mesh  
>$ ./mgcube
```

NX, NY, NZ

20, 20, 20

← 各辺長さを
訊いてくる
← このように
入れてみる

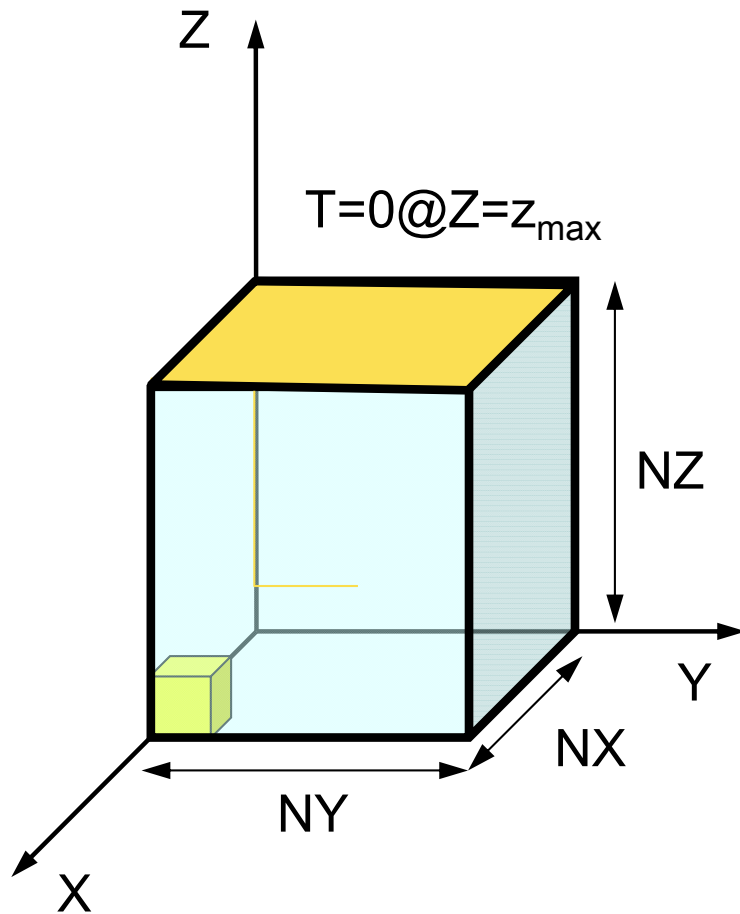
```
>$ ls cube.0
```

生成を確認

```
cube.0
```

とやりたいところだが, Oakleaf-FX
上でこれはできない(そもそもログイン
ノードと計算ノードがアーキテクチャ異なる)
一般ユーザーは「インタラクティブ実行」
ができるのだが, 皆さんには許されていない

ということでバッチジョブでお願いします



```
>$ cd <$O-TOP>/pfem3d/mesh
```

```
>$ pjsub mg.sh
```

```
...
```

```
>$ ls cube.0
```

生成を確認

```
cube.0
```

mg.sh

```
#!/bin/sh
```

```
#PJM -L "node=1"
```

```
#PJM -L "elapsed=00:10:00"
```

```
#PJM -L "rscgrp=lecture"
```

```
#PJM -g "gt00"
```

```
#PJM -j
```

```
#PJM -o "mg.lst"
```

```
#PJM --mpi "proc=1"
```

```
./mgcube < inp_mg
```

inp_mg

```
20 20 20
```

領域分割

- 初期全体メッシュファイル名 (cube.0)
 - バイナリ出力です (on FX10)
- 分割方法 (RCB, METIS)
- 分散メッシュファイルヘッダー
 - “work” という名前を使ってはいけない
- RCB
 - 分割数, 分割座標軸
- METIS (kmetis, pmetis)
 - 分割数

<\$O-TOP>/pfem3d/part/Makefile

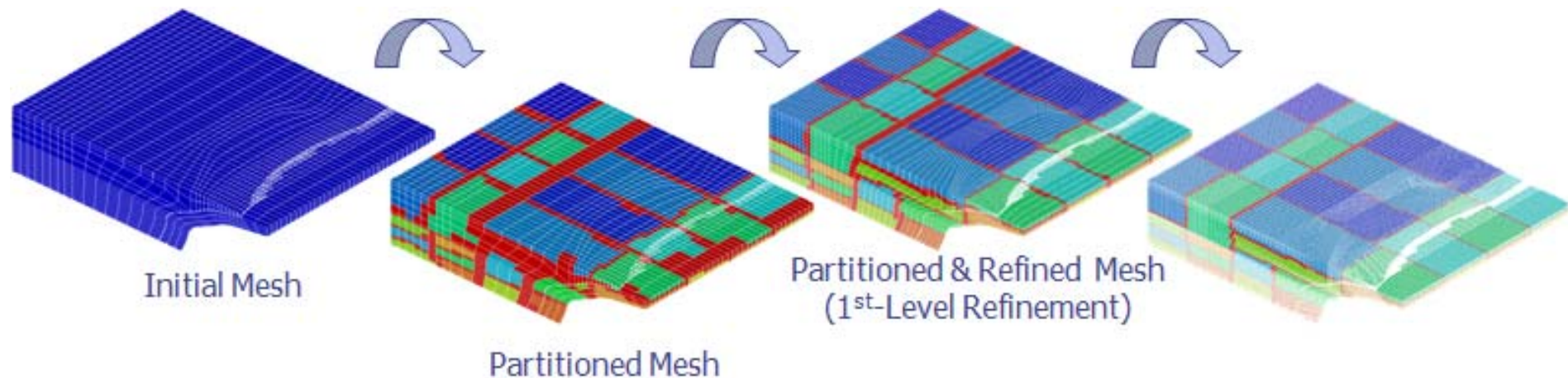
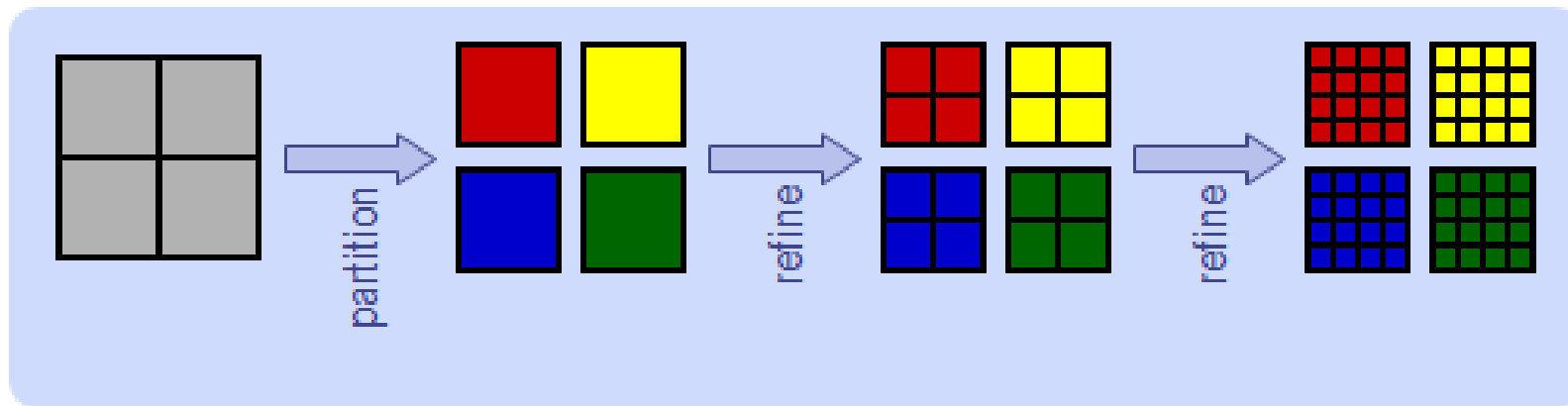
```
F77      = mpifrtpx
F90      = mpifrtpx
FLINKER  = $(F77)
F90LINKER = $(F90)
FLIB_PATH =
INC_DIR  =
OPTFLAGS = -Kfast
FFLAGS   = $(OPTFLAGS)
FLIBS    = /home/ss/aics60/metis-4.0/libmetis.a

TARGET = ../mesh/part
default: $(TARGET)
OBJS =¥
geofem_util.o partitioner.o input_grid.o main.o calc_edgcut.o
cre_local_data.o define_file_name.o interface_nodes.o metis.o
neib_pe.o paraset.o proc_local.o local_data.o double_numbering.o
output_ucd.o util.o

$(TARGET) :  $(OBJS)
$(F90LINKER) $(OPTFLAGS) -o $(TARGET) $(OBJS) $(FLIBS)
clean:
    /bin/rm -f *.o $(TARGET) *~ *.mod
.f.o:
    $(F90) $(FFLAGS) $(INC_DIR) -c  $*.f
.SUFFIXES: .f
```

実際の大規模計算

- そもそも「初期全体メッシュ」を単一ファイルとして用意できない場合もある。
- 「粗い」初期メッシュ→分割→整合性をとりながら局所的に細分化，という方式が適用されることが多い



```
>$ cd <$O-TEST>/pfem3d/mesh
>$ ./part
```

Original GRID-FILE ?

cube.0

```
* INODTOT =      9261
* GRID
* IELMTOT =      8000
* ELM
* BOUNDARY : NODE group
```

Xmin

Ymin

Zmin

Zmax

```
* IEDGTOT =      26460      37044
```

select PARTITIONING METHOD

```
RCB                      (1)
```

```
K-METIS                  (2)
```

```
P-METIS                  (3)
```

Please TYPE 1 or 3 or 4 !!

```
>>>
```

1

```
*** RECURSIVE COORDINATE BISECTION (RCB)
How many partitions (2**n)?
```

```
>>>
```

3

```
***      8 REGIONS
```

```
# HEADER of the OUTPUT file ?
HEADER should not be <work>
```

```
>>>
```

aaa

```
##### 1-th BiSECTION #####
```

in which direction ? X:1, Y:2, Z:3

```
>>>
```

1

X-direction

```
##### 2-th BiSECTION #####
```

in which direction ? X:1, Y:2, Z:3

```
>>>
```

2

Y-direction

```
##### 3-th BiSECTION #####
```

in which direction ? X:1, Y:2, Z:3

```
>>>
```

3

Z-direction

```
RECURSIVE COORDINATE BISECTION
```

```
*** GRID file
```

8 PEs

```
TOTAL EDGE      #      26460
TOTAL EDGE CUT  #      1593
```

```
TOTAL NODE      #      9261
TOTAL CELL      #      8000
```

PE	NODE#	CELL#						
0	1158	1223						
1	1158	1188						
2	1158	1222						
3	1158	1176						
4	1158	1188						
5	1157	1179						
6	1157	1188						
7	1157	1175						
MAX.node/PE			1158					
MIN.node/PE			1157					
MAX.cell/PE			1223					
MIN.cell/PE			1175					
OVERLAPPED ELEMENTS			1373					
PE/NEIB-PE#		NEIB-PEs						
0	7	7	6	4	5	2	1	3
1	7	7	5	6	0	2	4	3
2	7	7	6	0	5	1	4	3
3	6	7	2	6	1	5	0	
4	6	6	7	5	0	2	1	
5	7	7	6	4	0	1	2	3
6	7	7	5	4	0	2	1	3
7	7	6	5	4	0	2	1	3
PE:	0	1626	1158	468	435			
PE:	1	1589	1158	431	411			
PE:	2	1620	1158	462	490			
PE:	3	1560	1158	402	409			
PE:	4	1574	1158	416	421			
PE:	5	1565	1157	408	397			
PE:	6	1580	1157	423	414			
PE:	7	1564	1157	407	440			
		(内点+外点) 数	内点数	外点数	境界点数			
KCHF091R STOP						* normal termination		

```
>$ ls -l aaa.*  
  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 268829 Jan 12 14:57 aaa.0  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 261490 Jan 12 14:57 aaa.1  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 268086 Jan 12 14:57 aaa.2  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 257631 Jan 12 14:57 aaa.3  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 258719 Jan 12 14:57 aaa.4  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 256853 Jan 12 14:57 aaa.5  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 259093 Jan 12 14:57 aaa.6  
-rw-r--r-- 1 t18013 t18 257161 Jan 12 14:57 aaa.7
```

- 局所分散メッシュファイル
 - <HEADER>.<領域番号>
 - 領域番号は「0」から(MPIの都合)

とやりたいところだが, Oakleaf-FX
上でこれはできない。ということで
再びバッチジョブでお願いいたします。

RCB: part_rcb.sh inp_rcb

part_rcb.sh

```
#!/bin/sh
#PJM -L "node=1"
#PJM -L "elapsed=00:05:00"
#PJM -L "rscgrp=school"
#PJM -j
#PJM -o "rcb.lst"
#PJM --mpi "proc=1"
```

```
./part < inp_rcb
```

```
rm work.*
```

inp_rcb

cube.0	初期全体メッシュファイル
1	1:RCB, 2:KMETIS, 3:PMETIS
3	m: 2 ^m 個の領域に分割
aaa	局所分散メッシュファイルヘッダ
1	分割軸 (X:1, Y:2, Z:3)
2	
3	

inp_rcb : 1分割にしたい時

cube.0	初期全体メッシュファイル
1	1:RCB, 2:KMETIS, 3:PMETIS
0	m: 2 ^m 個の領域に分割
aaa	局所分散メッシュファイルヘッダ

kmetis: part_kmetis.sh inp_kmetis

Edge-Cut最小

part_kmetis.sh

```
#!/bin/sh
#PJM -L "node=1"
#PJM -L "elapsed=00:05:00"
#PJM -L "rscgrp=school"
#PJM -j
#PJM -o "kmetis.lst"
#PJM --mpi "proc=1"

./part < inp_kmetis

rm work.*
```

inp_kmetis

cube.0	初期全体メッシュファイル
2	1:RCB, 2:KMETIS, 3:PMETIS
8	領域数
aaa	局所分散メッシュファイルヘッダ

pmetis: part_pmetis.sh inp_pmetis

ロードバランス

part_pmetis.sh

```
#!/bin/sh
#PJM -L "node=1"
#PJM -L "elapsed=00:05:00"
#PJM -L "rscgrp=school"
#PJM -j
#PJM -o "pmetis.lst"
#PJM --mpi "proc=1"

./part < inp_pmetis

rm work.*
```

inp_pmetis

cube.0	初期全体メッシュファイル
3	1:RCB, 2:KMETIS, 3:PMETIS
8	領域数
aaa	局所分散メッシュファイルヘッダ

partition.log

```
RECURSIVE COORDINATE BISECTION

*** GRID file

      8 PEs

TOTAL EDGE      #      26460
TOTAL EDGE CUT #      1593

TOTAL NODE      #      9261
TOTAL CELL      #      8000

PE      NODE#    CELL#
 0      1158     1223
 1      1158     1188
 2      1158     1222
 3      1158     1176
 4      1158     1188
 5      1157     1179
 6      1157     1188
 7      1157     1175

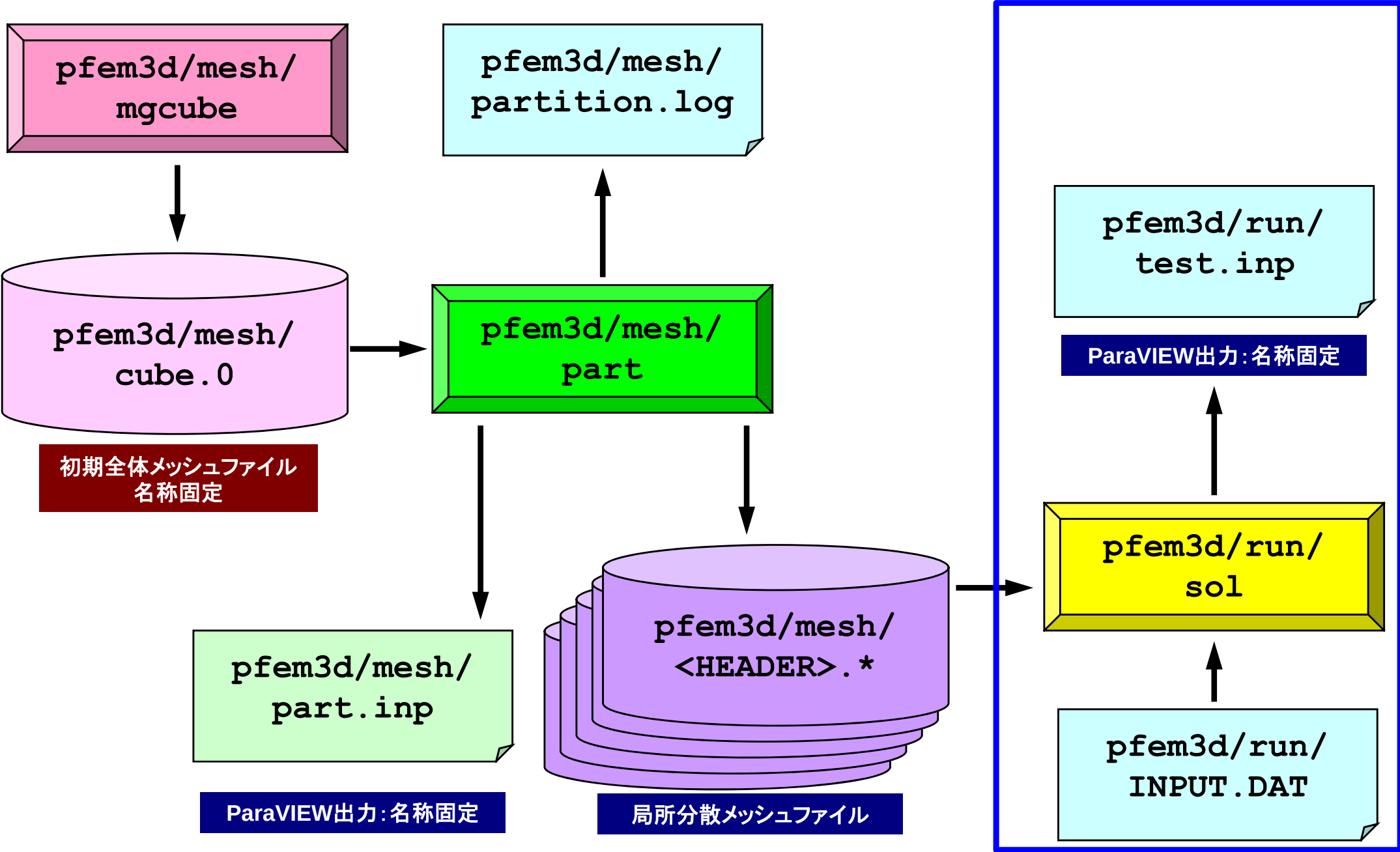
MAX.node/PE      1158
MIN.node/PE      1157
MAX.cell/PE      1223
MIN.cell/PE      1175

OVERLAPPED ELEMENTS      1373

PE/NEIB-PE#      NEIB-PEs
 0      7      7      6      4      5      2      1      3
 1      7      7      5      6      0      2      4      3
 2      7      7      6      0      5      1      4      3
 3      6      7      2      6      1      5      0
 4      6      6      7      5      0      2      1
 5      7      7      6      4      0      1      2      3
 6      7      7      5      4      0      2      1      3
 7      7      6      5      4      0      2      1      3
```

$NX=NY=NZ=9$, RCB: 2^3 領域

並列有限要素法の手順



制御ファイル: INPUT.DAT

INPUT.DAT

```

../mesh/aaa    HEADER
2000           ITER
1.0 1.0        COND, QVOL
1.0e-08        RESID

```

- HEADER: 局所分散メッシュファイルのヘッダー
- ITER: 反復回数上限
- COND: 熱伝導率
- QVOL: 体積当たり発熱量係数
- RESID: 反復法の収束判定値

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}(x, y, z) = 0$$

$$\dot{Q}(x, y, z) = QVOL |x_C + y_C|$$

理想値からのずれ

- MPI通信そのものに要する時間
 - データを送付している時間
 - ノード間においては通信バンド幅によって決まる
 - 通信時間は送受信バッファのサイズに比例
- MPIの立ち上がり時間
 - latency
 - 送受信バッファのサイズによらない
 - 呼び出し回数依存, プロセス数が増加すると増加する傾向
 - 通常, 数～数十 μ secのオーダー
- MPIの同期のための時間
 - プロセス数が増加すると増加する傾向
- 計算時間が小さい場合(問題規模が小さい場合)はこれらの効果を無視できない。
 - 特に, 送信メッセージ数が小さい場合は, 「Latency」が効く。

通信：メモリーコピー

実は意外にメモリの負担もかかる

```
!C
!C-- SEND
  do neib= 1, NEIBPETOT
    istart= EXPORT_INDEX(neib-1)
    inum   = EXPORT_INDEX(neib  ) - istart
    do k= istart+1, istart+inum
      ii   = EXPORT_ITEM(k)
      WS(k)= X(ii)
    enddo

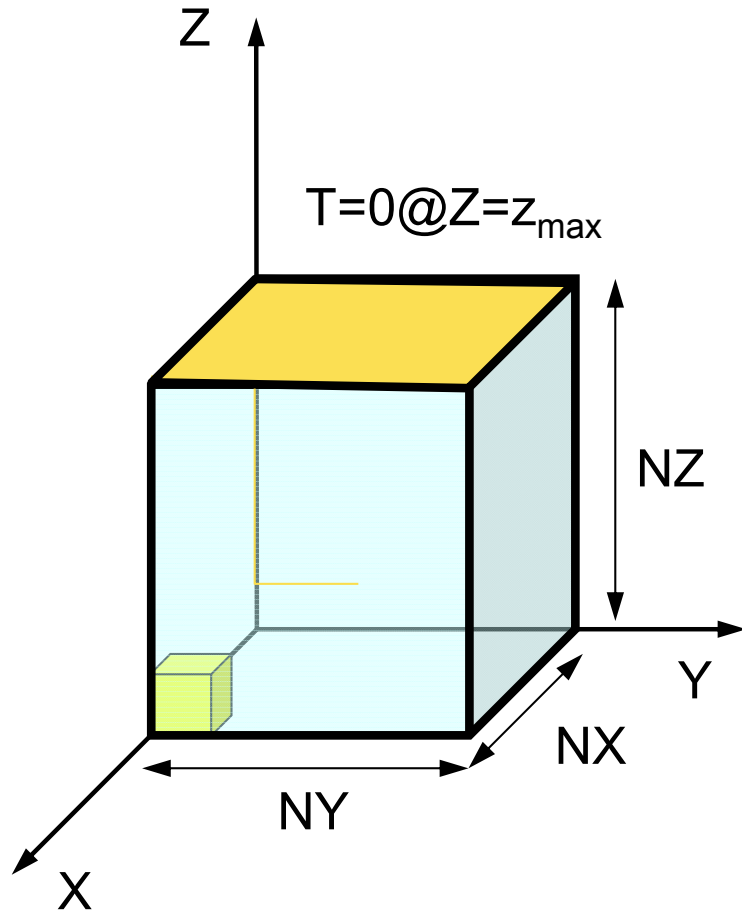
    call MPI_Isend (WS(istart+1), inum, MPI_DOUBLE_PRECISION,      &
&                      NEIBPE(neib), 0, MPI_COMM_WORLD, req1(neib), &
&                      ierr)
  enddo
```

- プログラムのインストール
- 実行
 - 並列有限要素法の手順
 - 領域分割とは？
 - 本当の実行
- データ構造

領域分割

- 初期全体メッシュファイル名 (cube.0)
- 分割方法 (RCB, METIS)
- 分散メッシュファイルヘッダー
 - “work” という名前を使ってはいけない
- RCB
 - 分割数, 分割座標軸
- METIS
 - ファイル名

初期全体メッシュ生成



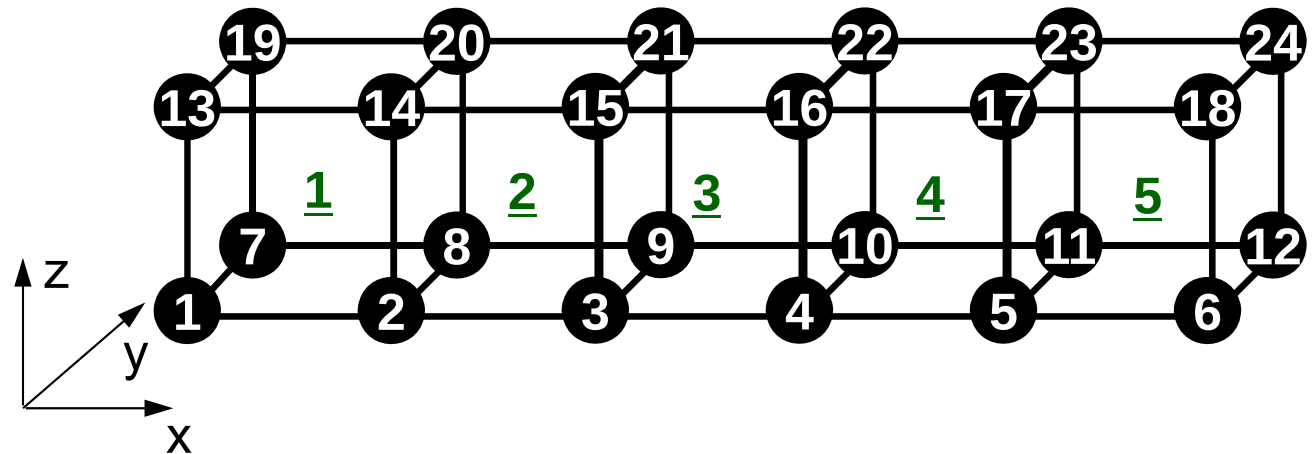
```
>$ cd <$O-TOP>/pfem3d/mesh
```

**NX=5, NY=1, NZ=1でメッシュを生成する
(バッチ処理)**

```
>$ ls cube.0
```

生成を確認

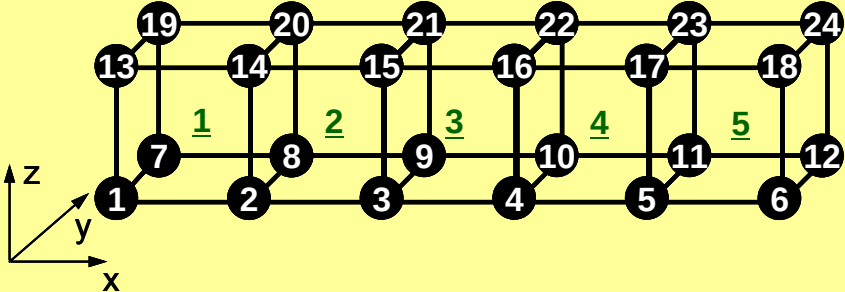
```
cube.0
```



初期全体メッシュ(1/2)

24

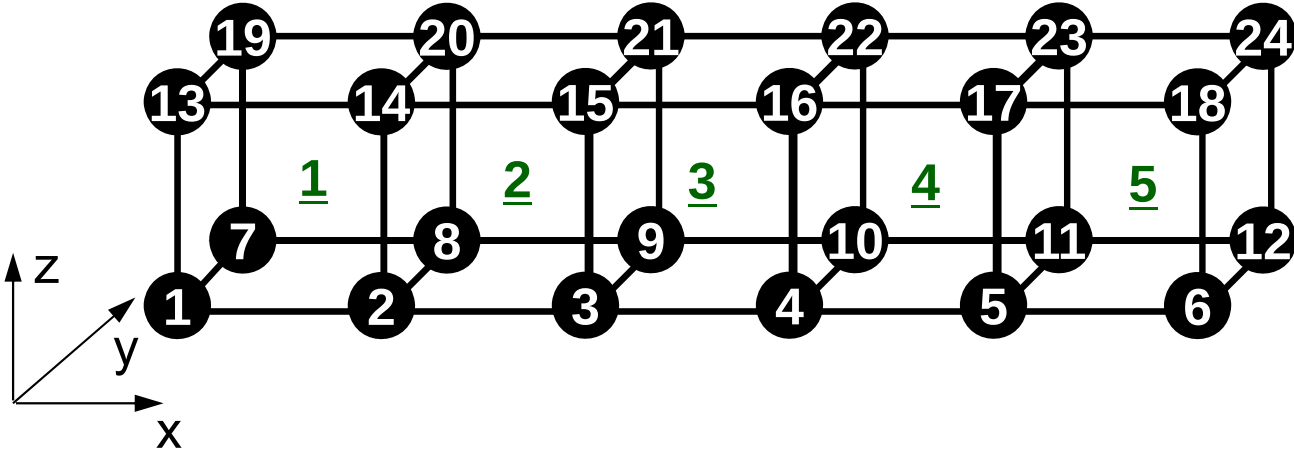
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	2.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	3.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
5	4.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	5.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	0.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
8	1.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
9	2.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
10	3.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
11	4.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
12	5.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
13	0.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00
14	1.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00
15	2.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00
16	3.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00
17	4.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00
18	5.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00
19	0.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
20	1.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
21	2.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
22	3.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
23	4.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
24	5.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00



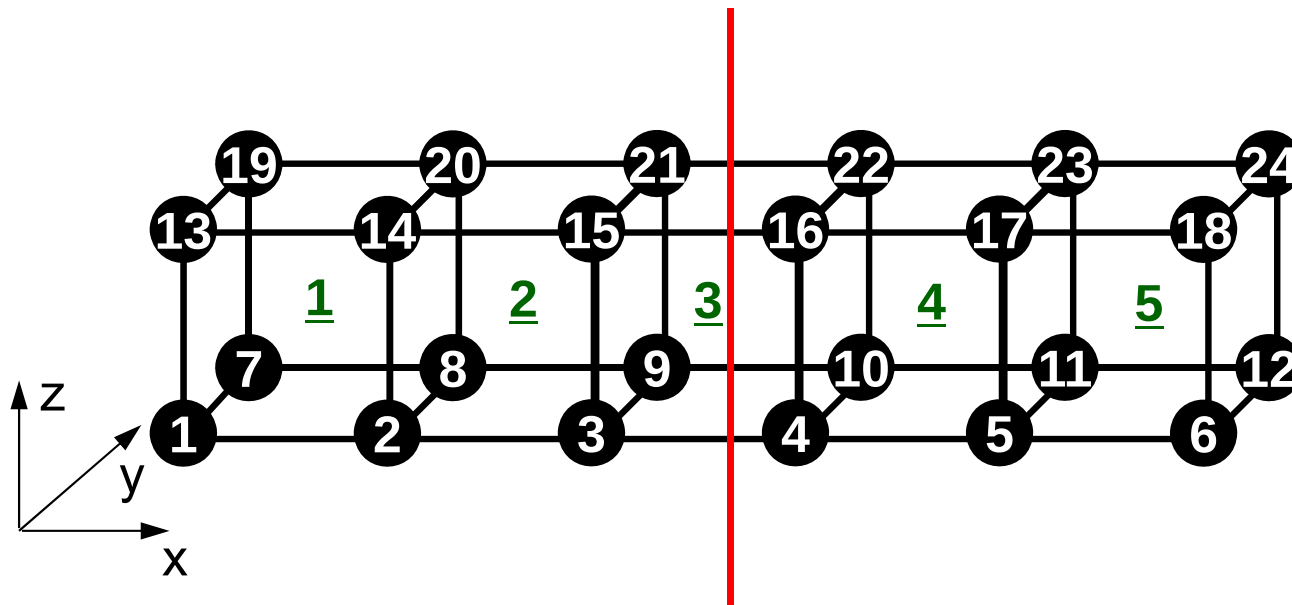
5									
361	361	361	361	361					
1	1	1	2	8	7	13	14	20	19
2	1	2	3	9	8	14	15	21	20
3	1	3	4	10	9	15	16	22	21
4	1	4	5	11	10	16	17	23	22
5	1	5	6	12	11	17	18	24	23

初期全体メッシュ(2/2)

	4									
Xmin	4	16	28	40						
Ymin	1	7	13	19						
Zmin	1 17	2 18	3	4	5	6	13	14	15	16
Zmax	1 11	2 12	3	4	5	6	7	8	9	10
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	23	24								



領域分割：X軸方向に2分割



RCB: part_rcb.sh inp_rcb

part_rcb.sh

```
#!/bin/sh
#PJM -L "node=1"
#PJM -L "elapsed=00:10:00"
#PJM -L "rscgrp=lecture"
#PJM -g "gt61"
#PJM -j
#PJM -o "rcb.lst"
#PJM --mpi "proc=1"

./part < inp_rcb

rm work.*
```

inp_rcb

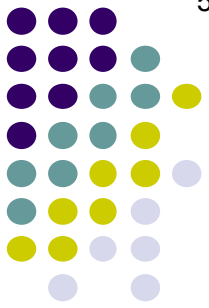
cube.0	初期全体メッシュファイル
1	1:RCB, 2:KMETIS, 3:PMETIS
1	m: 2^m 個の領域に分割
aaa	局所分散メッシュファイルヘッダ
1	分割軸 (X:1, Y:2, Z:3)

partition.log

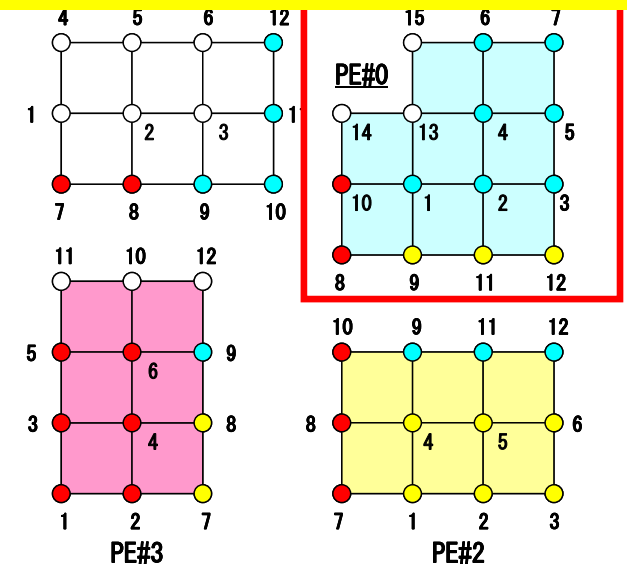
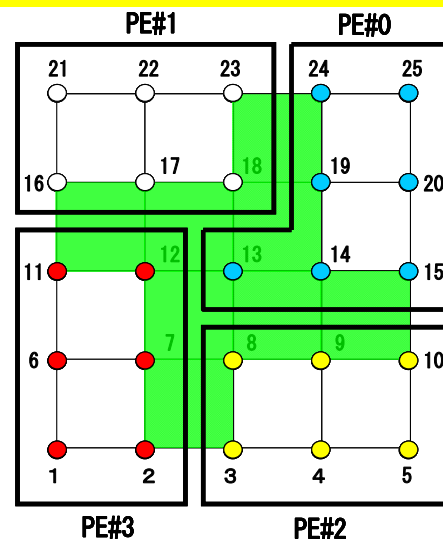
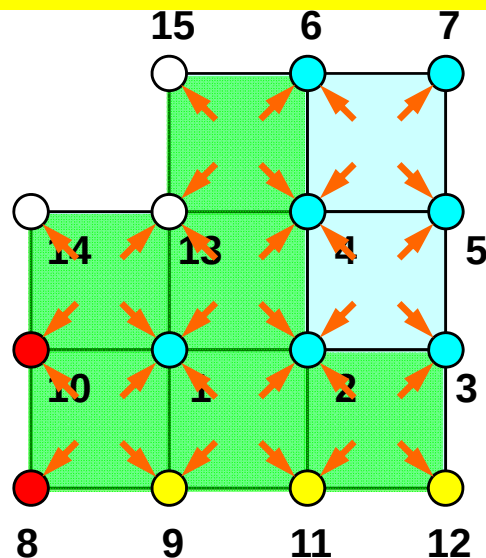
```
RECURSIVE COORDINATE BISECTION
*** GRID file
    2 PEs
TOTAL EDGE      #      44
TOTAL EDGE CUT #      4
TOTAL NODE      #      24
TOTAL CELL      #       5
PE      NODE#    CELL#
  0      12       3
  1      12       3
MAX.node/PE      12
MIN.node/PE      12
MAX.cell/PE       3
MIN.cell/PE       3
OVERLAPPED ELEMENTS      1
PE/NEIB-PE#      NEIB-PEs
  0    1          1
  1    1          0
```

Node-based Partitioning

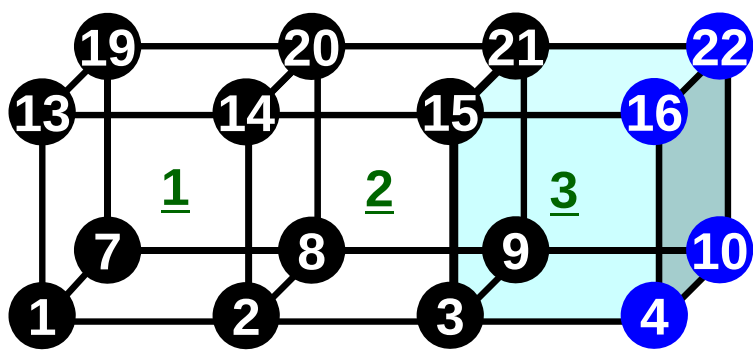
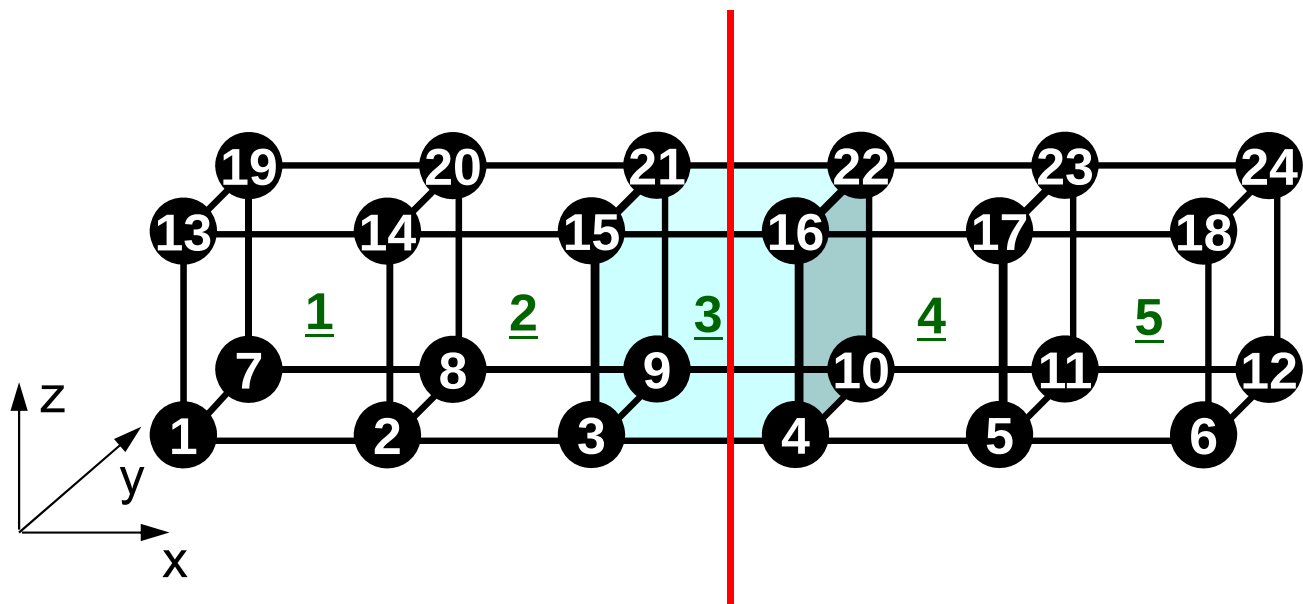
internal nodes - elements - external nodes



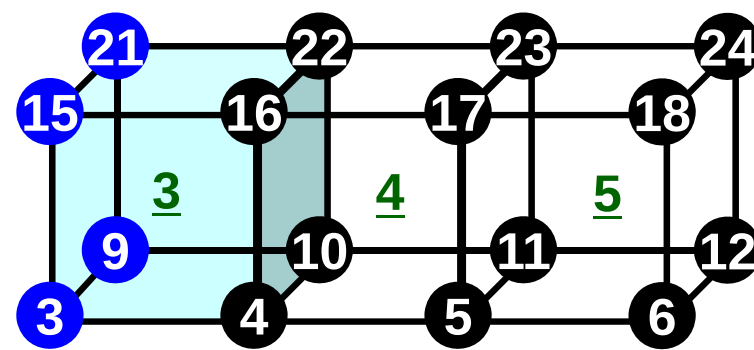
- Partitioned nodes themselves (Internal Nodes) 内点
- Elements which include Internal Nodes 内点を含む要素
- External Nodes included in the Elements 外点
in overlapped region among partitions.
- Info of External Nodes are required for completely local element-based operations on each processor.



領域分割：X軸方向に2分割



aaa.1



aaa.0

局所分散メッシュデータ

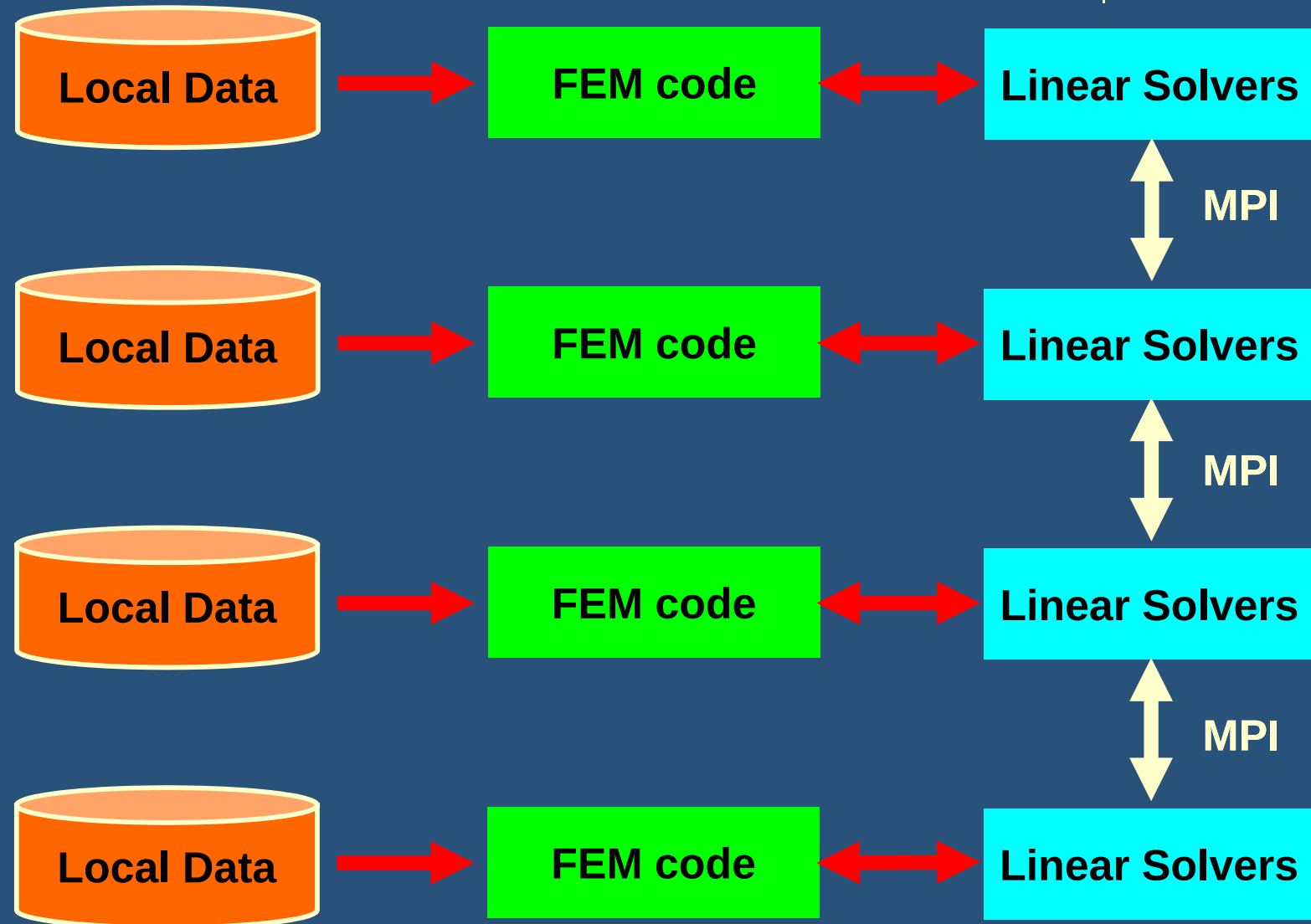
- 隣接領域
- 節点
- 要素
- 受信テーブル
- 送信テーブル
- 節点グループ

局所番号付け: 節点

- 局所番号は各領域「1」から番号付け
 - 1CPUの場合と同じプログラムを使用可能: SPMD
 - 要素番号も同じように「1」から番号付け
- 内点⇒外点という順番で番号付け
- Double Numbering
 - 本来の所属領域での局所節点番号
 - 所属領域番号

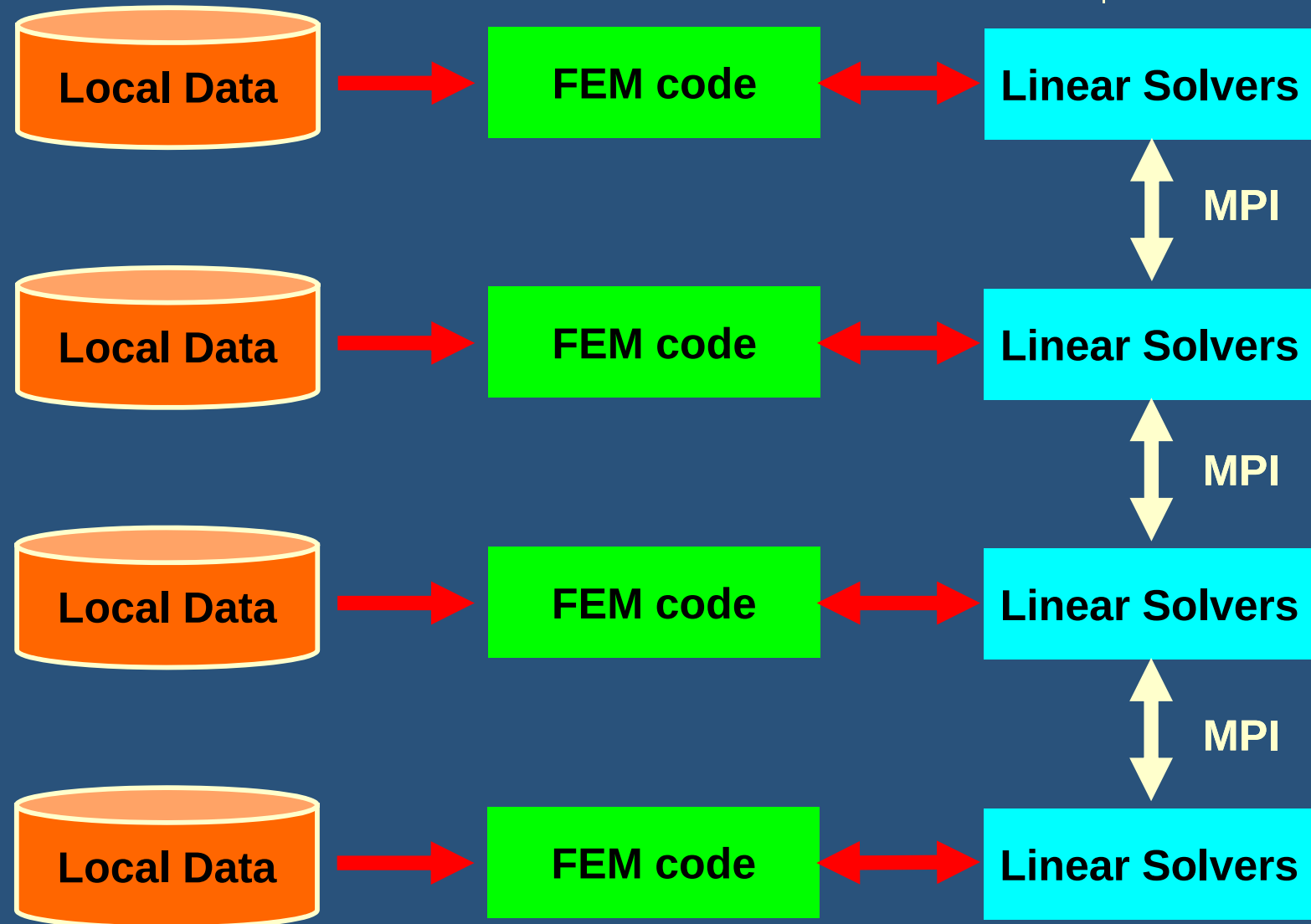
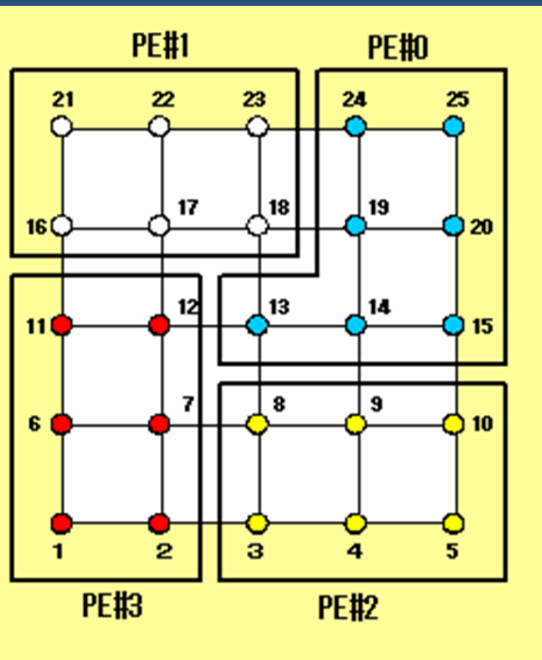
Parallel Computing in FEM

SPMD: Single-Program Multiple-Data



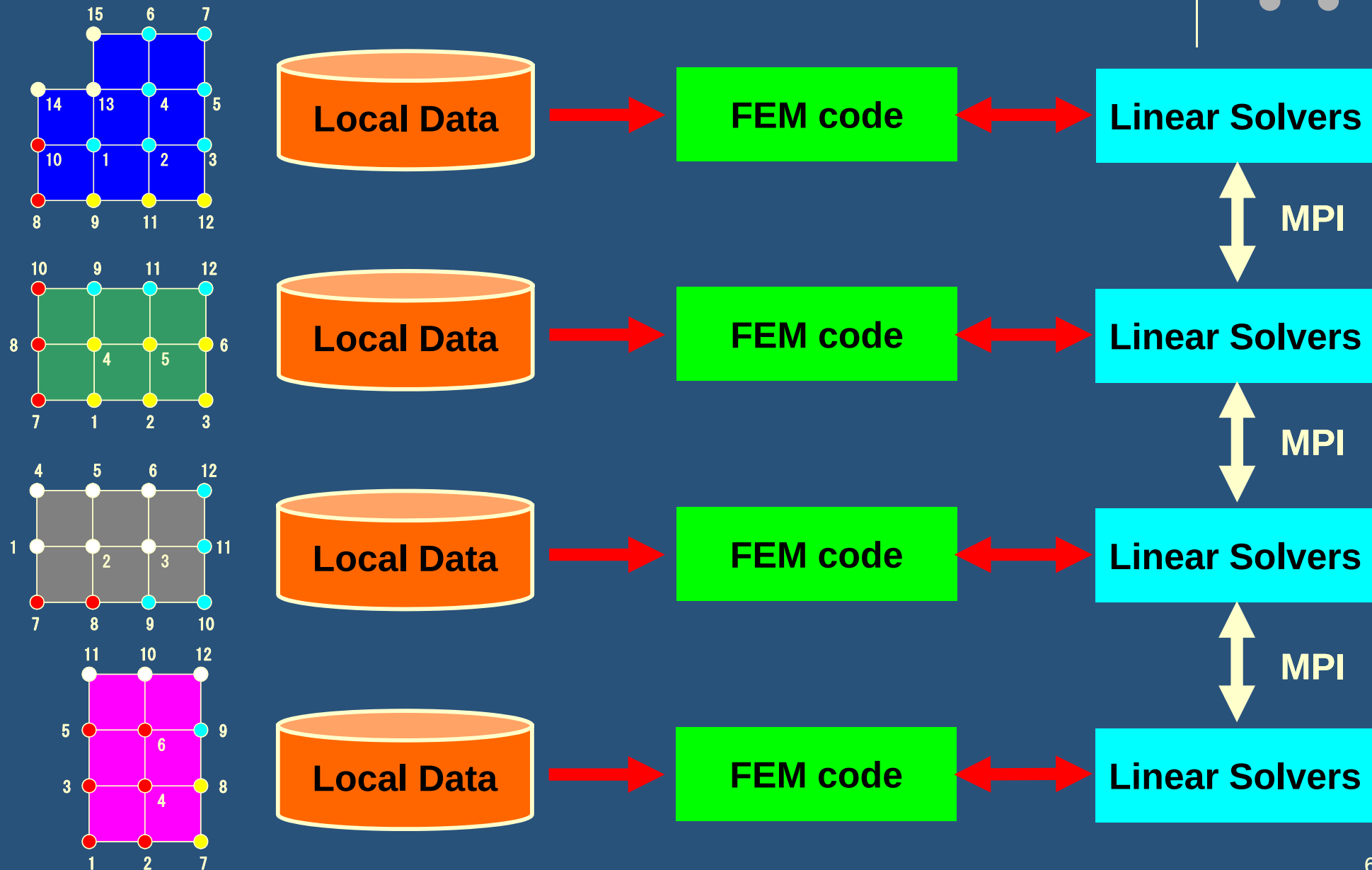
Parallel Computing in FEM

SPMD: Single-Program Multiple-Data



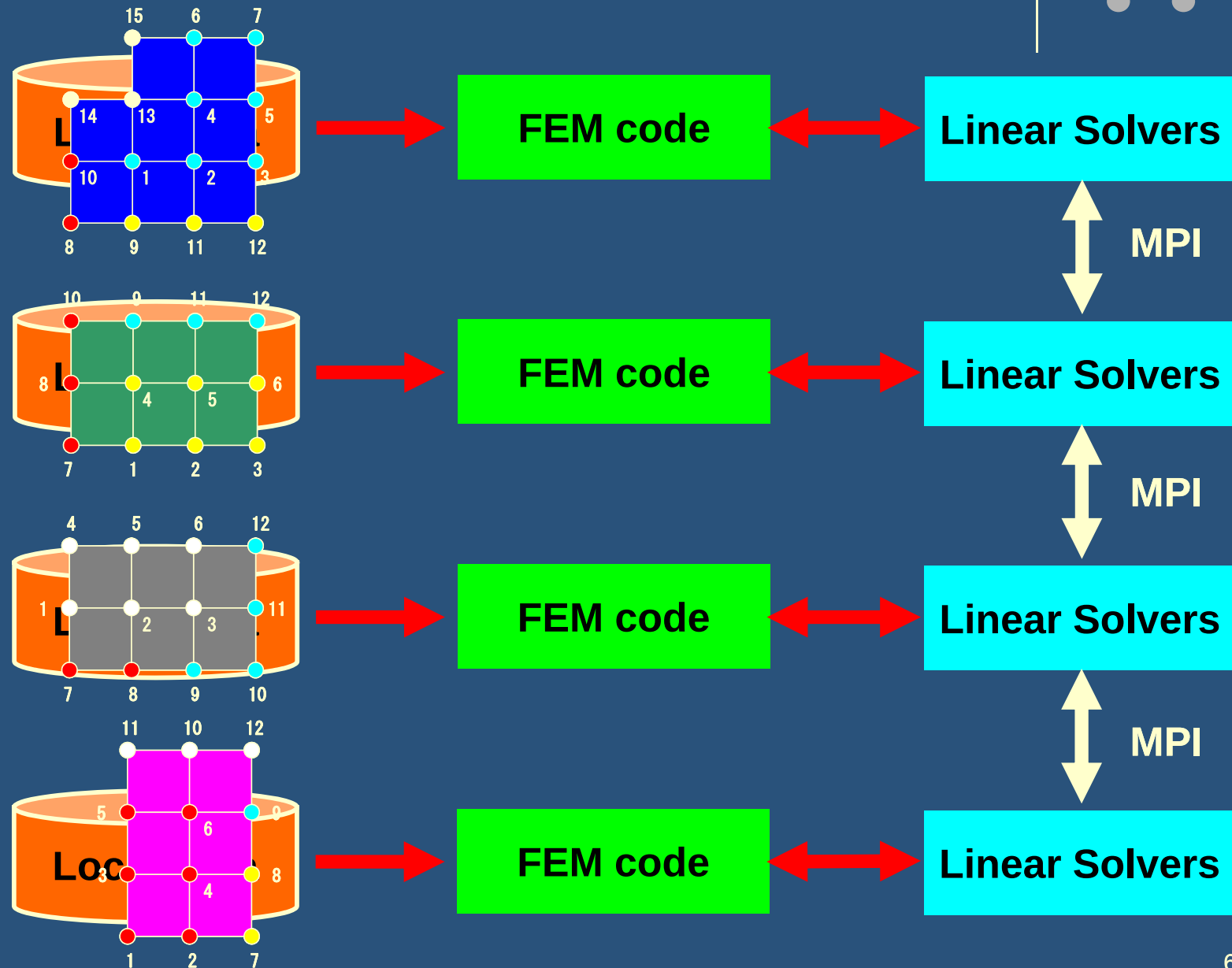
Parallel Computing in FEM

SPMD: Single-Program Multiple-Data



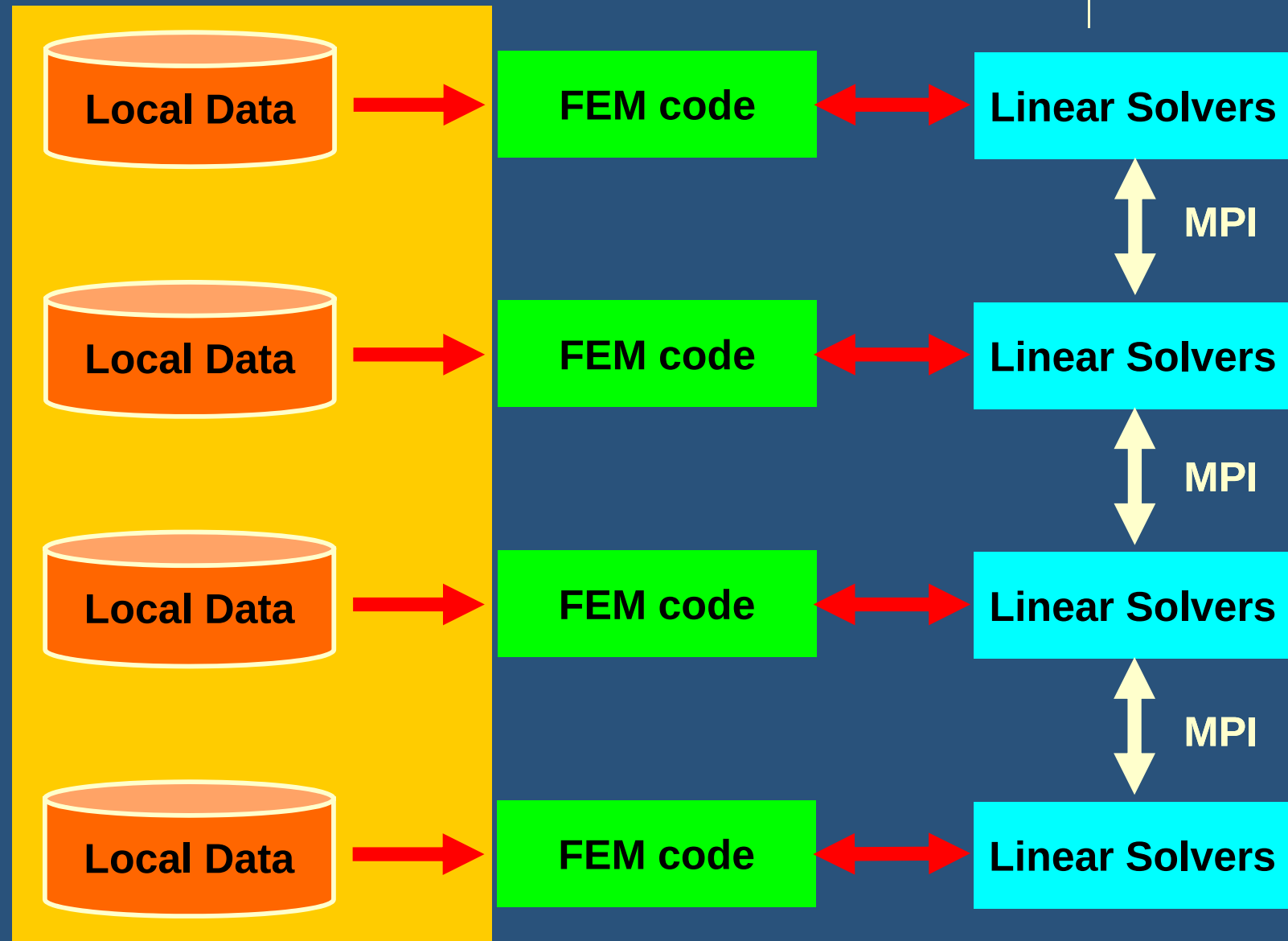
Parallel Computing in FEM

SPMD: Single-Program Multiple-Data



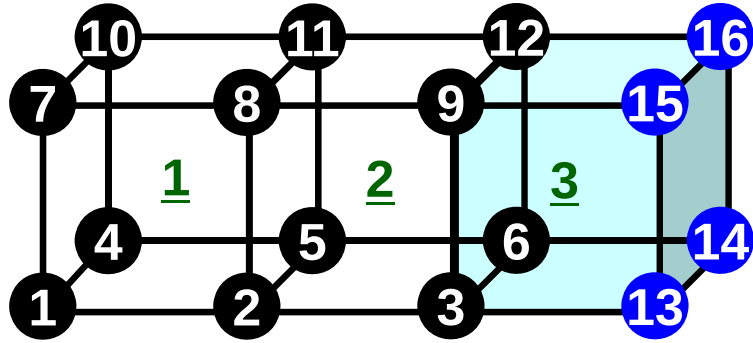
Parallel Computing in FEM

SPMD: Single-Program Multiple-Data

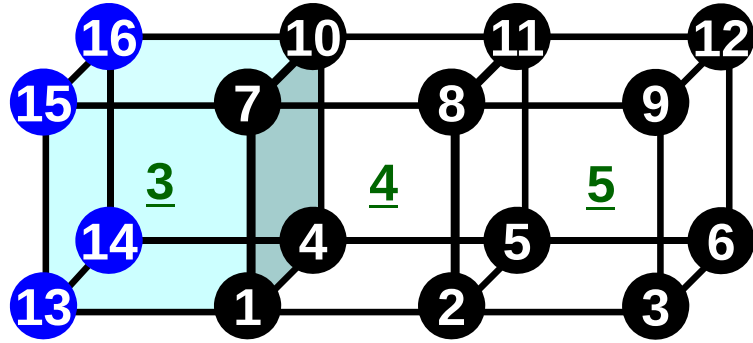


局所番号付け: 節点

aaa.1



aaa.0

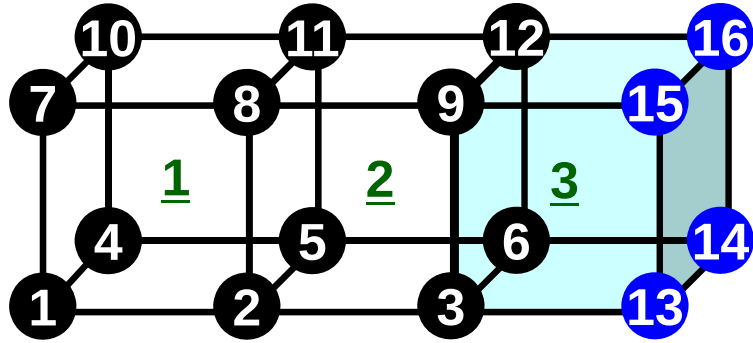


1				
1				
0				
16		12		
1	1	0.00	0.00	0.00
2	1	1.00	0.00	0.00
3	1	2.00	0.00	0.00
4	1	0.00	1.00	0.00
5	1	1.00	1.00	0.00
6	1	2.00	1.00	0.00
7	1	0.00	0.00	1.00
8	1	1.00	0.00	1.00
9	1	2.00	0.00	1.00
10	1	0.00	1.00	1.00
11	1	1.00	1.00	1.00
12	1	2.00	1.00	1.00
1	0	3.00	0.00	0.00
4	0	3.00	1.00	0.00
7	0	3.00	0.00	1.00
10	0	3.00	1.00	1.00

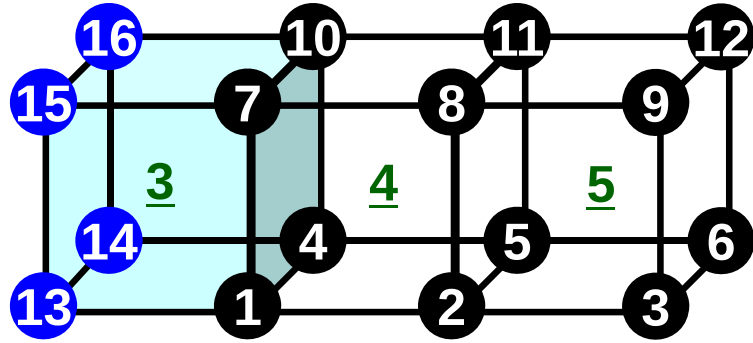
0				
1				
1				
16		12		
1	0	3.00	0.00	0.00
2	0	4.00	0.00	0.00
3	0	5.00	0.00	0.00
4	0	3.00	1.00	0.00
5	0	4.00	1.00	0.00
6	0	5.00	1.00	0.00
7	0	3.00	0.00	1.00
8	0	4.00	0.00	1.00
9	0	5.00	0.00	1.00
10	0	3.00	1.00	1.00
11	0	4.00	1.00	1.00
12	0	5.00	1.00	1.00
3	1	2.00	0.00	0.00
6	1	2.00	1.00	0.00
9	1	2.00	0.00	1.00
12	1	2.00	1.00	1.00

局所番号付け: 節点

aaa.1



aaa.0

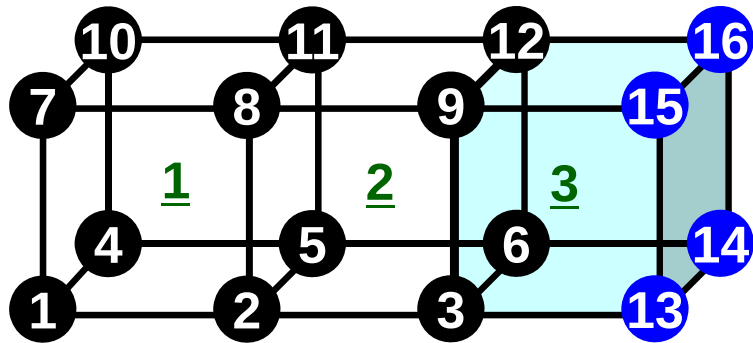


1				
1				
0				
16		12		
1	1	0.00	0.00	0.00
2	1	1.00	0.00	0.00
3	1	2.00	0.00	0.00
4	1	0.00	1.00	0.00
5	1	1.00	1.00	0.00
6	1	2.00	1.00	0.00
7	1	0.00	0.00	1.00
8	1	1.00	0.00	1.00
9	1	2.00	0.00	1.00
10	1	0.00	1.00	1.00
11	1	1.00	1.00	1.00
12	1	2.00	1.00	1.00
1	0	3.00	0.00	0.00
4	0	3.00	1.00	0.00
7	0	3.00	0.00	1.00
10	0	3.00	1.00	1.00

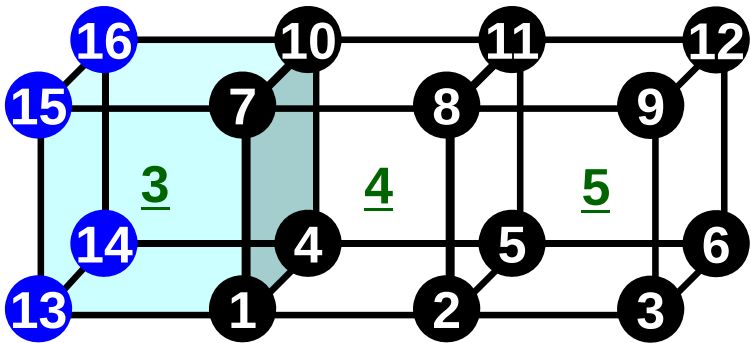
0				
1				
1				
16		12		
1	0	3.00	0.00	0.00
2	0	4.00	0.00	0.00
3	0	5.00	0.00	0.00
4	0	3.00	1.00	0.00
5	0	4.00	1.00	0.00
6	0	5.00	1.00	0.00
7	0	3.00	0.00	1.00
8	0	4.00	0.00	1.00
9	0	5.00	0.00	1.00
10	0	3.00	1.00	1.00
11	0	4.00	1.00	1.00
12	0	5.00	1.00	1.00
3	1	2.00	0.00	0.00
6	1	2.00	1.00	0.00
9	1	2.00	0.00	1.00
12	1	2.00	1.00	1.00

局所番号付け: 節点

aaa.1



aaa.0

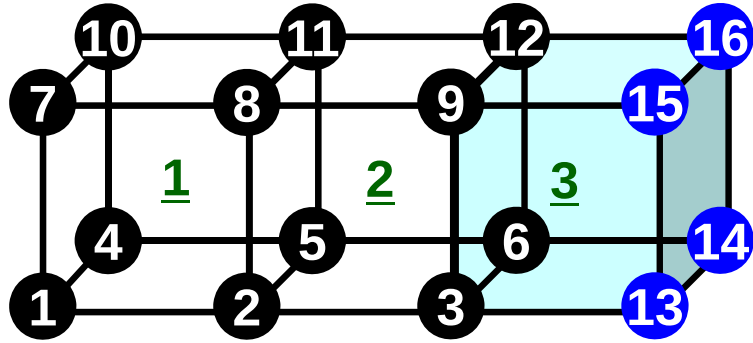


1				
1				
0				
16		12		
1	1	0.00	0.00	0.00
2	1	1.00	0.00	0.00
3	1	2.00	0.00	0.00
4	1	0.00	1.00	0.00
5	1	1.00	1.00	0.00
6	1	2.00	1.00	0.00
7	1	0.00	0.00	1.00
8	1	1.00	0.00	1.00
9	1	2.00	0.00	1.00
10	1	0.00	1.00	1.00
11	1	1.00	1.00	1.00
12	1	2.00	1.00	1.00
1	0	3.00	0.00	0.00
4	0	3.00	1.00	0.00
7	0	3.00	0.00	1.00
10	0	3.00	1.00	1.00

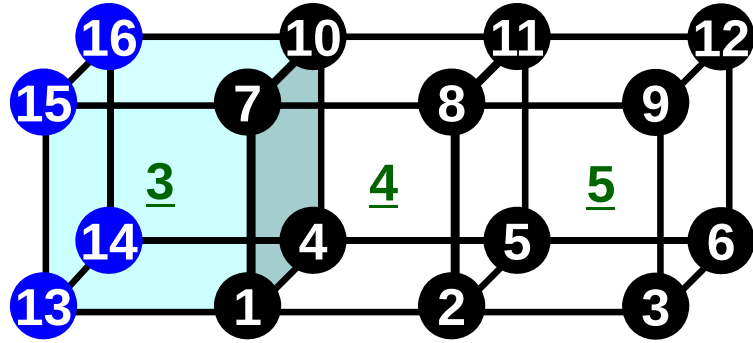
0				
1				
1				
16		12	(総節点数, 内点数)	
1	0	3.00	0.00	0.00
2	0	4.00	0.00	0.00
3	0	5.00	0.00	0.00
4	0	3.00	1.00	0.00
5	0	4.00	1.00	0.00
6	0	5.00	1.00	0.00
7	0	3.00	0.00	1.00
8	0	4.00	0.00	1.00
9	0	5.00	0.00	1.00
10	0	3.00	1.00	1.00
11	0	4.00	1.00	1.00
12	0	5.00	1.00	1.00
3	1	2.00	0.00	0.00
6	1	2.00	1.00	0.00
9	1	2.00	0.00	1.00
12	1	2.00	1.00	1.00

局所番号付け: 節点

aaa.1



aaa.0



1					
1					
0					
16		12			
1	1	0.00	0.00	0.00	①
2	1	1.00	0.00	0.00	②
3	1	2.00	0.00	0.00	③
4	1	0.00	1.00	0.00	④
5	1	1.00	1.00	0.00	⑤
6	1	2.00	1.00	0.00	⑥
7	1	0.00	0.00	1.00	⑦
8	1	1.00	0.00	1.00	⑧
9	1	2.00	0.00	1.00	⑨
10	1	0.00	1.00	1.00	⑩
11	1	1.00	1.00	1.00	⑪
12	1	2.00	1.00	1.00	⑫
1	0	3.00	0.00	0.00	⑬
4	0	3.00	1.00	0.00	⑭
7	0	3.00	0.00	1.00	⑮
10	0	3.00	1.00	1.00	⑯

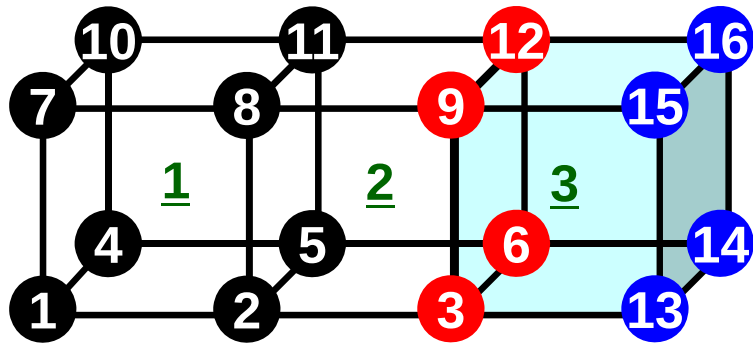
所属領域とそこでの番号 座標

0					
1					
1					
16		12			
1	0	3.00	0.00	0.00	①
2	0	4.00	0.00	0.00	②
3	0	5.00	0.00	0.00	③
4	0	3.00	1.00	0.00	④
5	0	4.00	1.00	0.00	⑤
6	0	5.00	1.00	0.00	⑥
7	0	3.00	0.00	1.00	⑦
8	0	4.00	0.00	1.00	⑧
9	0	5.00	0.00	1.00	⑨
10	0	3.00	1.00	1.00	⑩
11	0	4.00	1.00	1.00	⑪
12	0	5.00	1.00	1.00	⑫
3	1	2.00	0.00	0.00	⑬
6	1	2.00	1.00	0.00	⑭
9	1	2.00	0.00	1.00	⑮
12	1	2.00	1.00	1.00	⑯

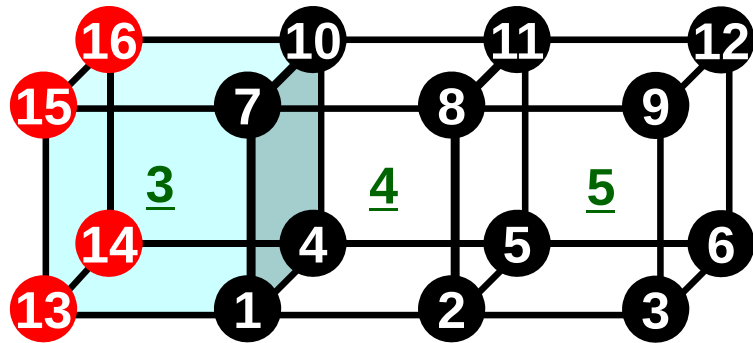
所属領域とそこでの番号 座標

局所番号付け: 節点

aaa.1



aaa.0



1					
1					
0					
16		12			
1	1	0.00	0.00	0.00	①
2	1	1.00	0.00	0.00	②
3	1	2.00	0.00	0.00	③
4	1	0.00	1.00	0.00	④
5	1	1.00	1.00	0.00	⑤
6	1	2.00	1.00	0.00	⑥
7	1	0.00	0.00	1.00	⑦
8	1	1.00	0.00	1.00	⑧
9	1	2.00	0.00	1.00	⑨
10	1	0.00	1.00	1.00	⑩
11	1	1.00	1.00	1.00	⑪
12	1	2.00	1.00	1.00	⑫
1	0	3.00	0.00	0.00	⑬
4	0	3.00	1.00	0.00	⑭
7	0	3.00	0.00	1.00	⑮
10	0	3.00	1.00	1.00	⑯

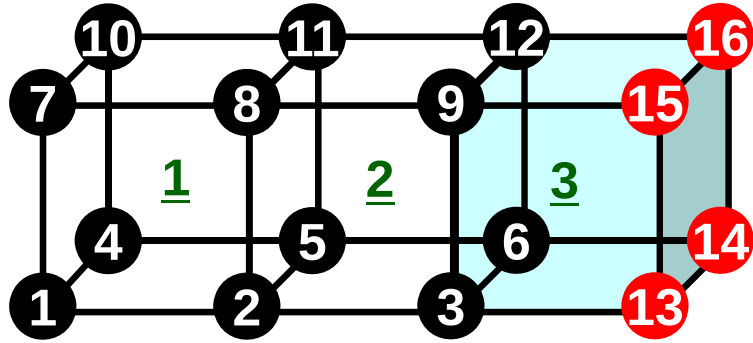
所属領域とそこでの番号 座標

0					
1					
1					
16		12			
1	0	3.00	0.00	0.00	①
2	0	4.00	0.00	0.00	②
3	0	5.00	0.00	0.00	③
4	0	3.00	1.00	0.00	④
5	0	4.00	1.00	0.00	⑤
6	0	5.00	1.00	0.00	⑥
7	0	3.00	0.00	1.00	⑦
8	0	4.00	0.00	1.00	⑧
9	0	5.00	0.00	1.00	⑨
10	0	3.00	1.00	1.00	⑩
11	0	4.00	1.00	1.00	⑪
12	0	5.00	1.00	1.00	⑫
3	1	2.00	0.00	0.00	⑬
6	1	2.00	1.00	0.00	⑭
9	1	2.00	0.00	1.00	⑮
12	1	2.00	1.00	1.00	⑯

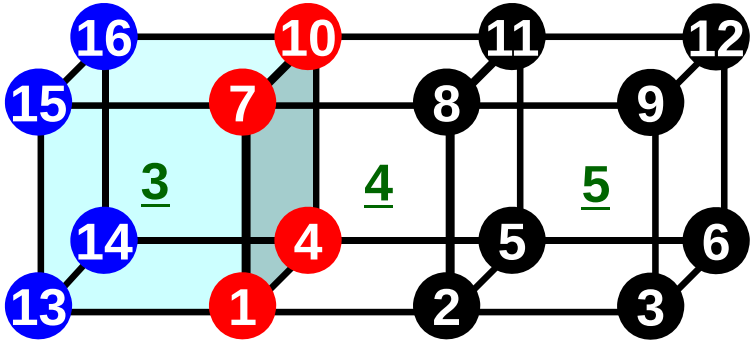
所属領域とそこでの番号 座標

局所番号付け: 節点

aaa.1



aaa.0



1					
1					
0					
16		12			
1	1	0.00	0.00	0.00	①
2	1	1.00	0.00	0.00	②
3	1	2.00	0.00	0.00	③
4	1	0.00	1.00	0.00	④
5	1	1.00	1.00	0.00	⑤
6	1	2.00	1.00	0.00	⑥
7	1	0.00	0.00	1.00	⑦
8	1	1.00	0.00	1.00	⑧
9	1	2.00	0.00	1.00	⑨
10	1	0.00	1.00	1.00	⑩
11	1	1.00	1.00	1.00	⑪
12	1	2.00	1.00	1.00	⑫
1	0	3.00	0.00	0.00	⑬
4	0	3.00	1.00	0.00	⑭
7	0	3.00	0.00	1.00	⑮
10	0	3.00	1.00	1.00	⑯

所属領域とそこでの番号 座標

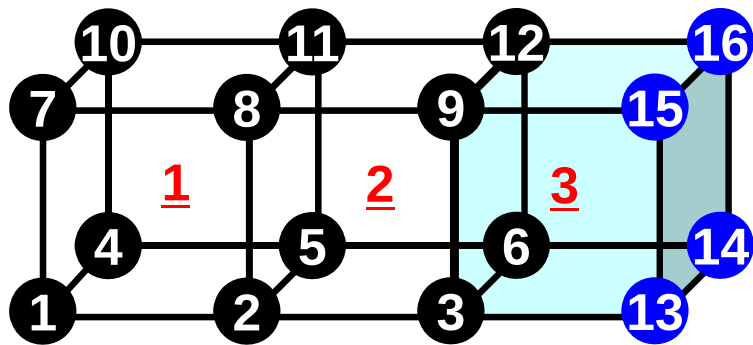
0					
1					
1					
16		12			
1	0	3.00	0.00	0.00	①
2	0	4.00	0.00	0.00	②
3	0	5.00	0.00	0.00	③
4	0	3.00	1.00	0.00	④
5	0	4.00	1.00	0.00	⑤
6	0	5.00	1.00	0.00	⑥
7	0	3.00	0.00	1.00	⑦
8	0	4.00	0.00	1.00	⑧
9	0	5.00	0.00	1.00	⑨
10	0	3.00	1.00	1.00	⑩
11	0	4.00	1.00	1.00	⑪
12	0	5.00	1.00	1.00	⑫
3	1	2.00	0.00	0.00	⑬
6	1	2.00	1.00	0.00	⑭
9	1	2.00	0.00	1.00	⑮
12	1	2.00	1.00	1.00	⑯

所属領域とそこでの番号 座標

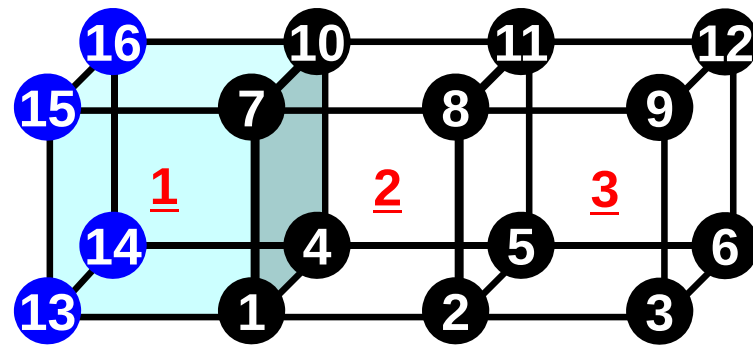
以降のデータ, プログラム内部で使うのは丸付き数字(局所節点番号)

局所番号付け:要素

aaa.1

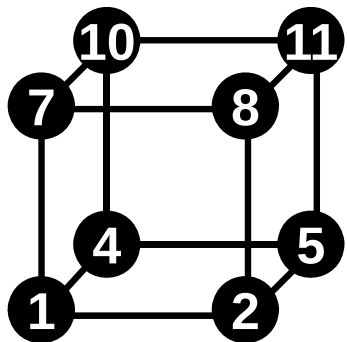


aaa.0



3	2										
361	361	361									
1	1	1	1	2	5	4	7	8	11	10	
2	1	1	2	3	6	5	8	9	12	11	
1	0	1	3	13	14	6	9	15	16	12	
1	2										

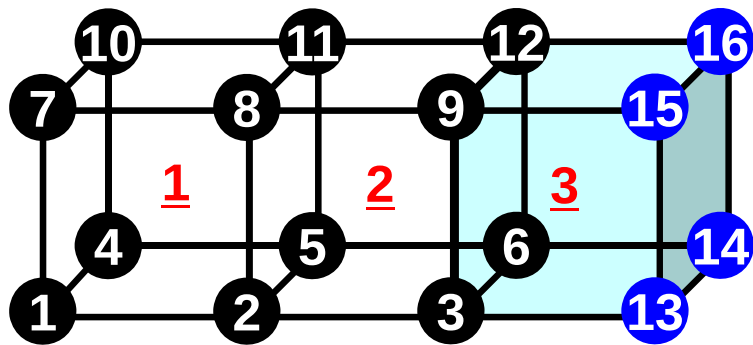
3	3	(全要素, 領域所属要素)									
361	361	361									
1	0	1	13	1	4	14	15	7	10	16	
2	0	1	1	2	5	4	7	8	11	10	
3	0	1	2	3	6	5	8	9	12	11	
1	2	3									



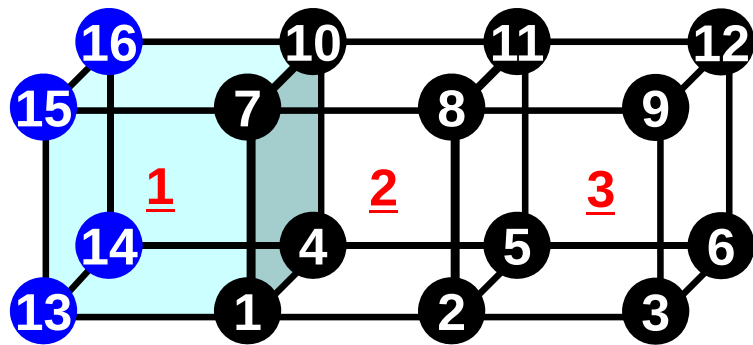
- 要素が所属する領域
 - 8個の節点の所属する領域によって決定
 - 全て「内点」であれば, 節点と同じ領域
 - 「外点」を含む場合は, 節点の所属領域番号の最も若い領域に属する
 - 本ケースのオーバーラップ要素は「0」領域に所属

局所番号付け:要素

aaa.1



aaa.0



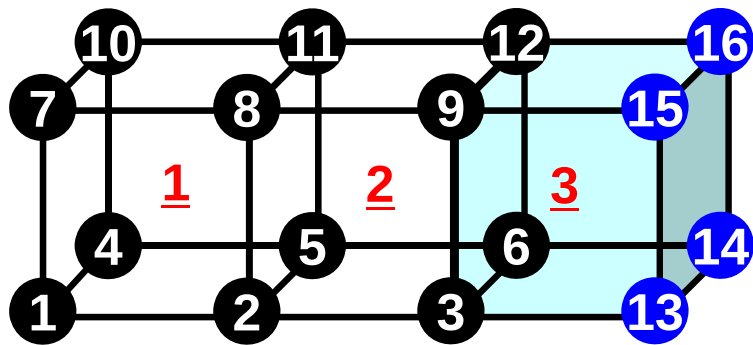
<u>3</u>	2														
361	361	361													
1	1	1	1	2	5	4	7	8	11	10	<u>1</u>				
2	1	1	2	3	6	5	8	9	12	11	<u>2</u>				
1	0	1	3	13	14	6	9	15	16	12	<u>3</u>				
1	2														

<u>3</u>	3														
361	361	361													
1	0	1	13	1	4	14	15	7	10	16	<u>1</u>				
2	0	1	1	2	5	4	7	8	11	10	<u>2</u>				
3	0	1	2	3	6	5	8	9	12	11	<u>3</u>				
1	2	3													

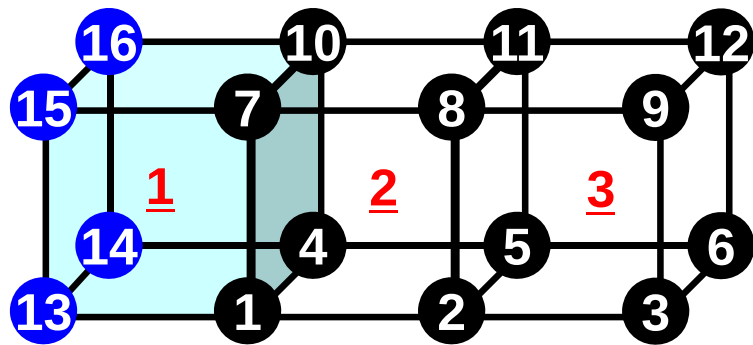
- 要素についてもDouble Numbering
 - 本来の所属領域での局所要素番号
 - 所属領域番号
- 材料番号
- 8個の節点
- 以降の計算では下線付の「局所要素番号」を使用

局所番号付け:要素

aaa.1



aaa.0



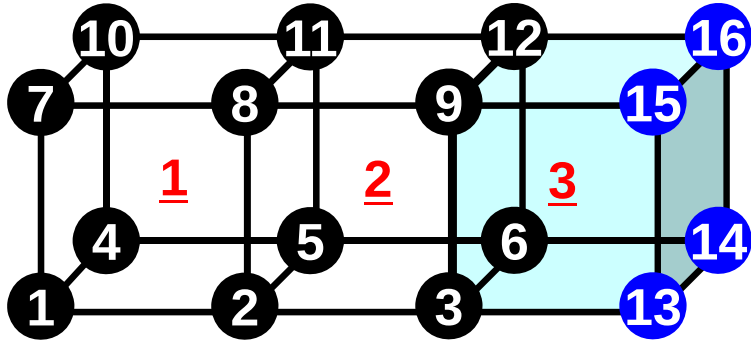
3	<u>2</u>														
361	361	361													
1	1	1	1	2	5	4	7	8	11	10	<u>1</u>				
2	1	1	2	3	6	5	8	9	12	11	<u>2</u>				
1	0	1	3	13	14	6	9	15	16	12	<u>3</u>				
1	2														

3	<u>3</u>														
361	361	361													
1	0	1	13	1	4	14	15	7	10	16	<u>1</u>				
2	0	1	1	2	5	4	7	8	11	10	<u>2</u>				
3	0	1	2	3	6	5	8	9	12	11	<u>3</u>				
1	2	3													

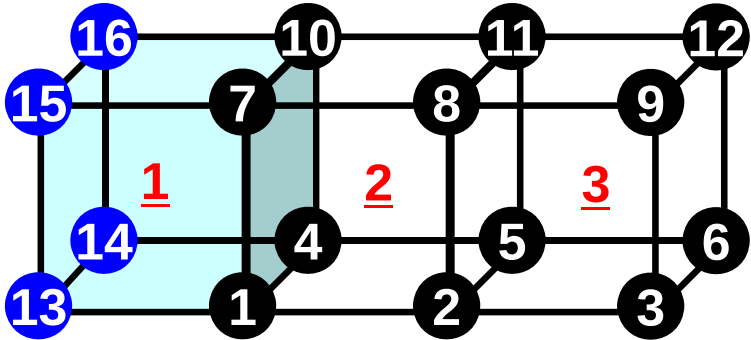
- aaa.1
 - 1, 2 の要素が「領域所属要素」
- aaa.0
 - 1, 2, 3 の要素が「領域所属要素」

通信テーブル: 受信, 送信

aaa.1



aaa.0



4	
13	0
14	0
15	0
16	0
4	
3	
6	
9	
12	

4	
13	1
14	1
15	1
16	1
4	
1	
4	
7	
10	

領域間通信

一般化された通信テーブル

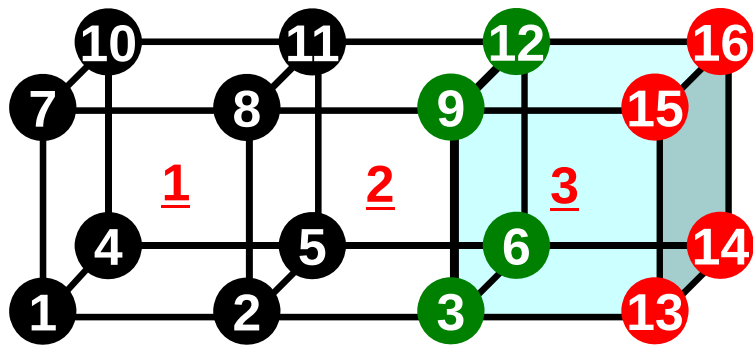
- 「通信」とは「外点」の情報を, その「外点」が本来属している領域から得ることである。
- 「通信テーブル」とは領域間の外点の関係の情報を記述したもの。
 - 「送信テーブル (export)」, 「受信テーブル (import)」がある。
- 送信側: 「境界点」として送る
- 受信側: 「外点」として受け取る

一般化された通信テーブル:送信

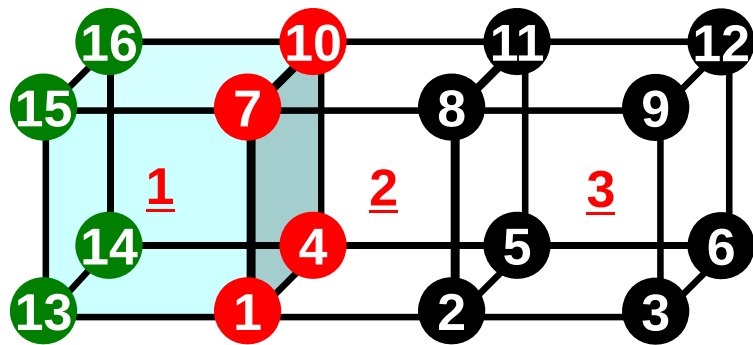
- 送信相手
 - NeibPETot, NeibPE[neib]
- それぞれの送信相手に送るメッセージサイズ
 - export_index[neib], neib= 0, NeibPETot
- 「境界点」番号
 - export_item[k], k= 0, export_index[NeibPETot]-1
- それぞれの送信相手に送るメッセージ
 - SendBuf[k], k= 0, export_index[NeibPETot]-1

通信テーブル(送信)

aaa.1



aaa.0



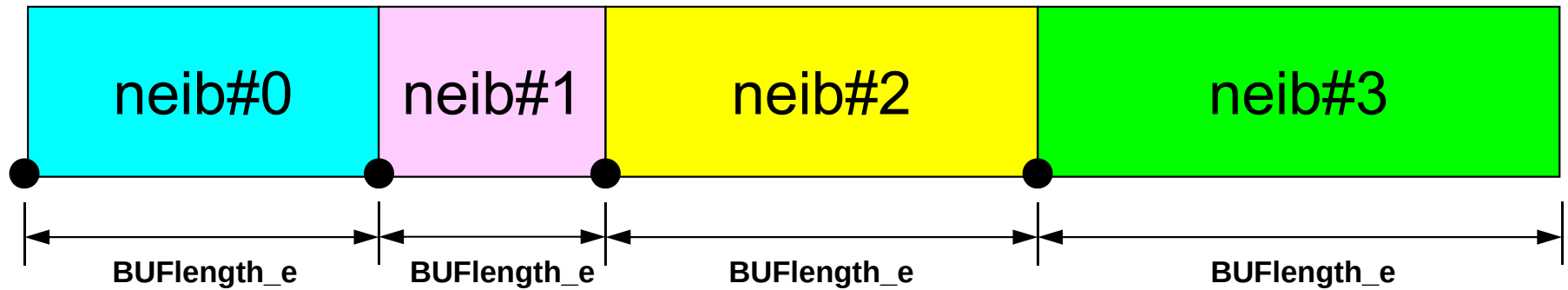
```
4
13
14
15
16
4
3
6
9
12
0
0
0
0
```

```
4
13
14
15
16
4
1
4
7
10
1
1
1
1
export_index(neib) : 送信節点数
export_item : 節点番号
```

- export_index 各隣接領域に送信する外点の数(累積数)
 - 現在:隣接領域数は1
- export_item 境界点の番号

送信 (MPI_Isend/Irecv/Waitall)

SendBuf



export_index[0] export_index[1] export_index[2] export_index[3] export_index[4]

export_index[neib] ~ export_index[neib+1]-1 番目の export_item が neib 番目の隣接領域に送信される

```
for (neib=0; neib<NeibPETot;neib++){
    for (k=export_index[neib];k<export_index[neib+1];k++){
        kk= export_item[k];
        SendBuf[k]= VAL[kk];
    }
}

for (neib=0; neib<NeibPETot; neib++){
    tag= 0;
    iS_e= export_index[neib];
    iE_e= export_index[neib+1];
    BUFlength_e= iE_e - iS_e

    ierr= MPI_Isend
        (&SendBuf[iS_e], BUFlength_e, MPI_DOUBLE, NeibPE[neib], 0,
         MPI_COMM_WORLD, &ReqSend[neib])

}

MPI_Waitall(NeibPETot, ReqSend, StatSend);
```

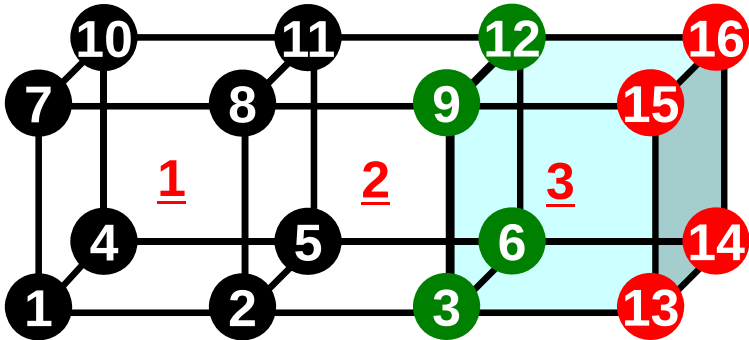
送信バッファへの代入

一般化された通信テーブル: 受信

- 受信相手
 - NeibPETot , NeibPE[neib]
- それぞれの受信相手から受け取るメッセージサイズ
 - import_index[neib], neib= 0, NeibPETot
- 「外点」番号
 - import_item[k], k= 0, import_index[NeibPETot]-1
- それぞれの受信相手から受け取るメッセージ
 - RecvBuf[k], k= 0, import_index[NeibPETot]-1

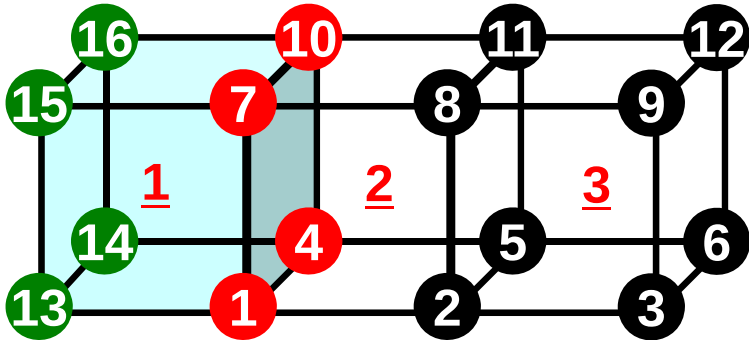
通信テーブル(受信)

aaa.1



4	
13	0
14	0
15	0
16	0
4	
3	
6	
9	
12	

aaa.0



4	import_index(neib) 受信節点数
13	1 import_item 節点番号, 領域
14	1
15	1
16	1
4	export_index(neib)
1	export_item
4	
7	
10	

- import_index 各隣接領域から受信する外点の数(累積数)
 - 現在:隣接領域数は1
- import_item 外点の番号, 所属領域

受信 (MPI_Isend/Irecv/Waitall)

```
for (neib=0; neib<NeibPETot; neib++){
    tag= 0;
    iS_i= import_index[neib];
    iE_i= import_index[neib+1];
    BUFlength_i= iE_i - iS_i

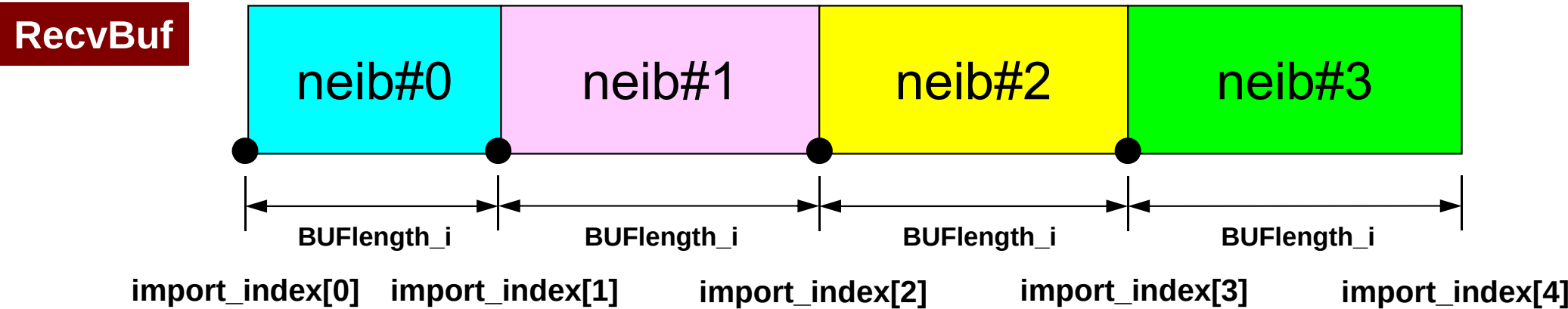
    ierr= MPI_Irecv
        (&RecvBuf[iS_i], BUFlength_i, MPI_DOUBLE, NeibPE[neib], 0,
         MPI_COMM_WORLD, &ReqRecv[neib])
}

MPI_Waitall(NeibPETot, ReqRecv, StatRecv);

for (neib=0; neib<NeibPETot;neib++){
    for (k=import_index[neib];k<import_index[neib+1];k++){
        kk= import_item[k];
        VAL[kk]= RecvBuf[k];
    }
}
```

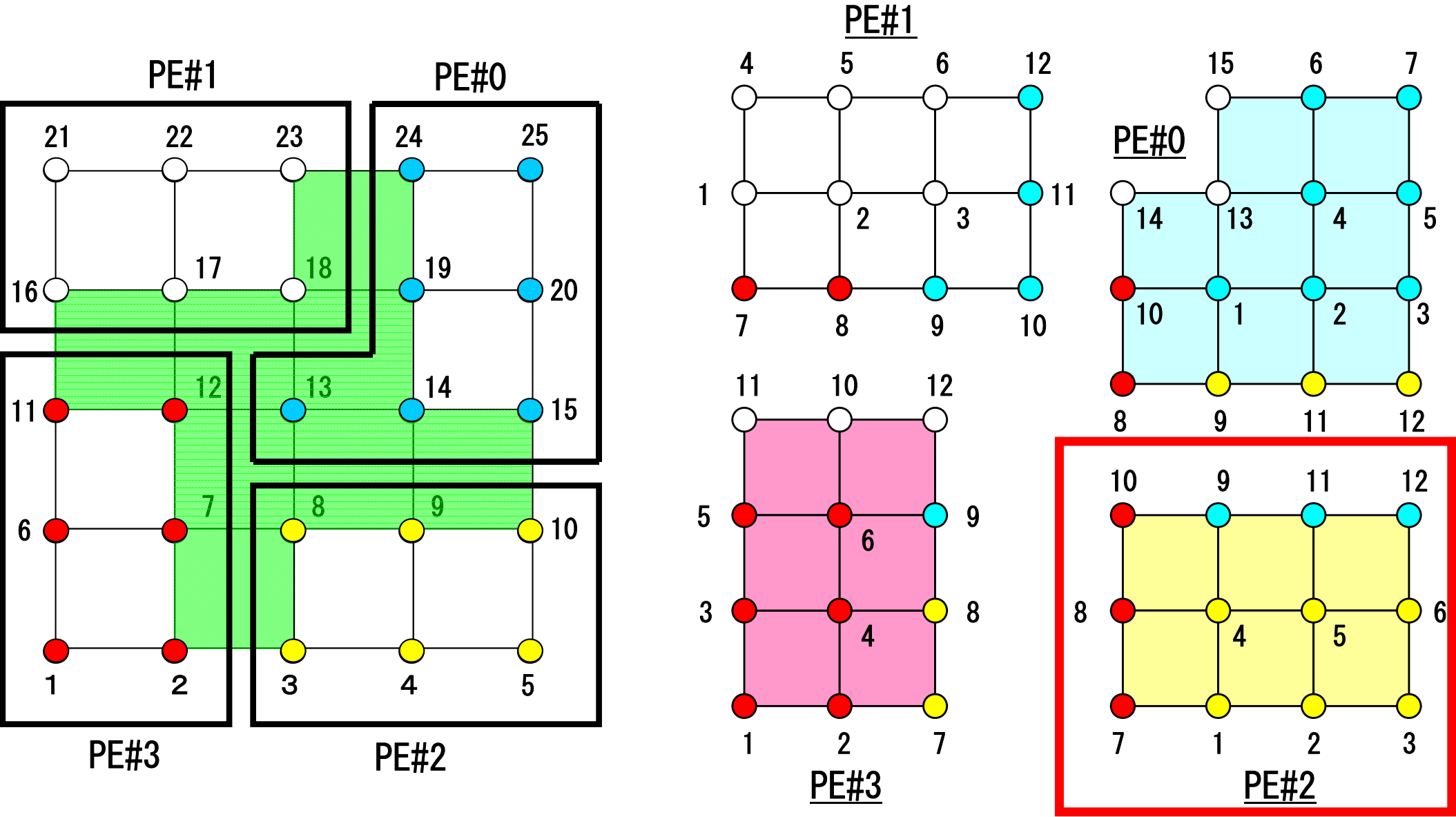
受信バッファからの代入

import_index[neib] ~ import_index[neib+1]-1番目のimport_itemがneib番目の隣接領域から受信される

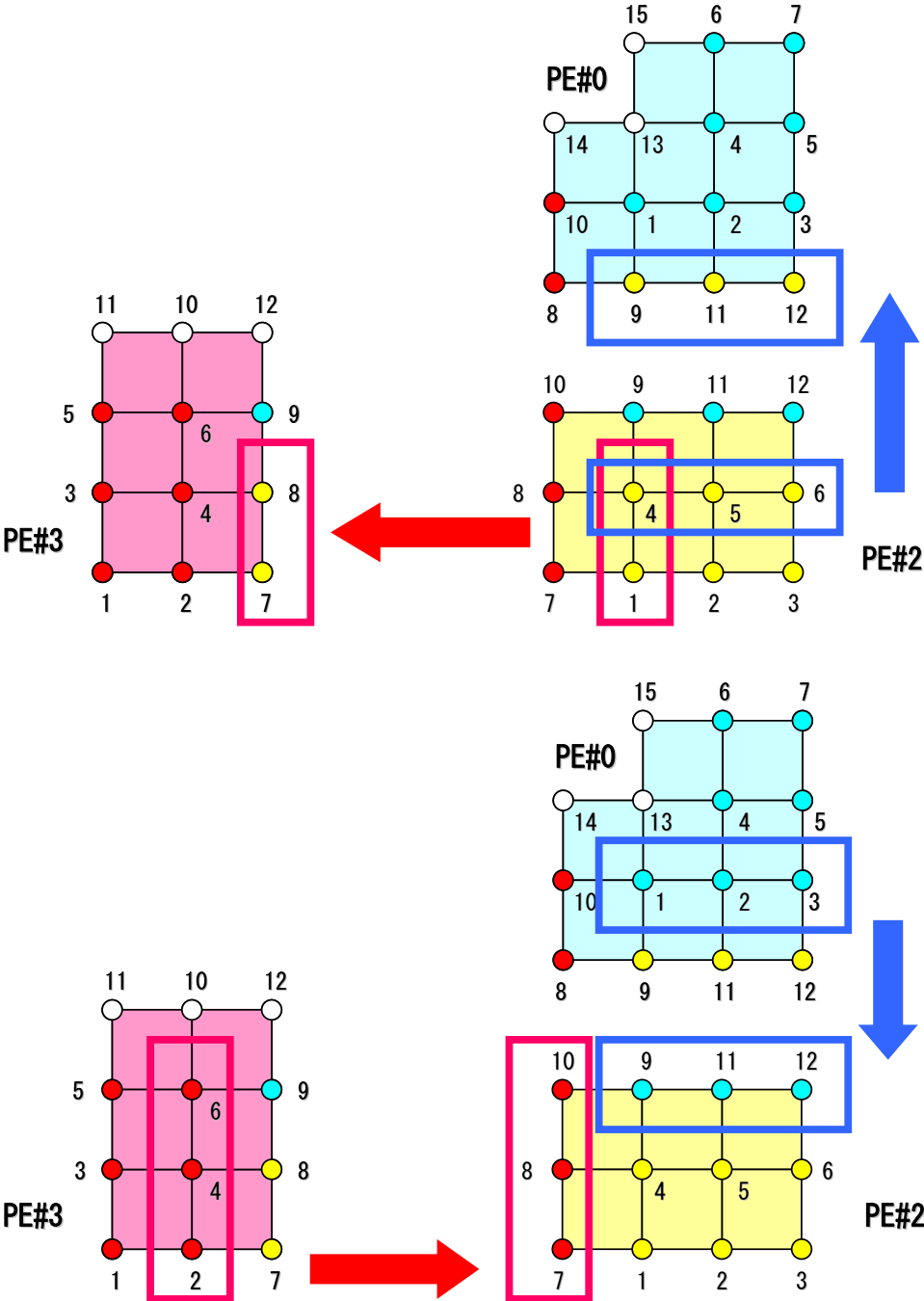


Node-based Partitioning

internal nodes - elements - external nodes



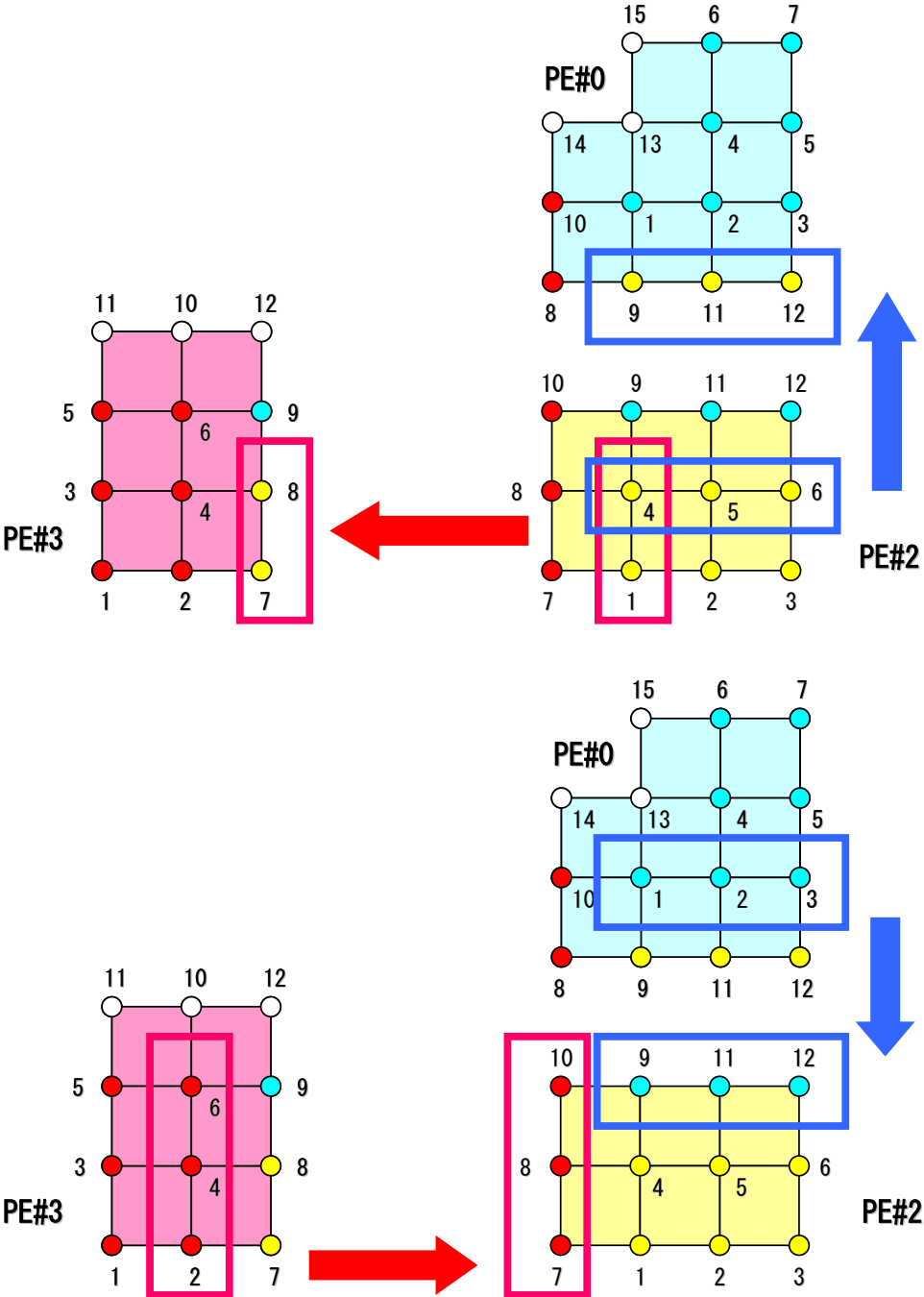
PE-to-PE comm. : Local Data



(中略)

2	0
2	6
3	3
3	3
7	3
8	0
10	0
9	0
11	0
12	5
2	
1	
4	
4	
5	
6	

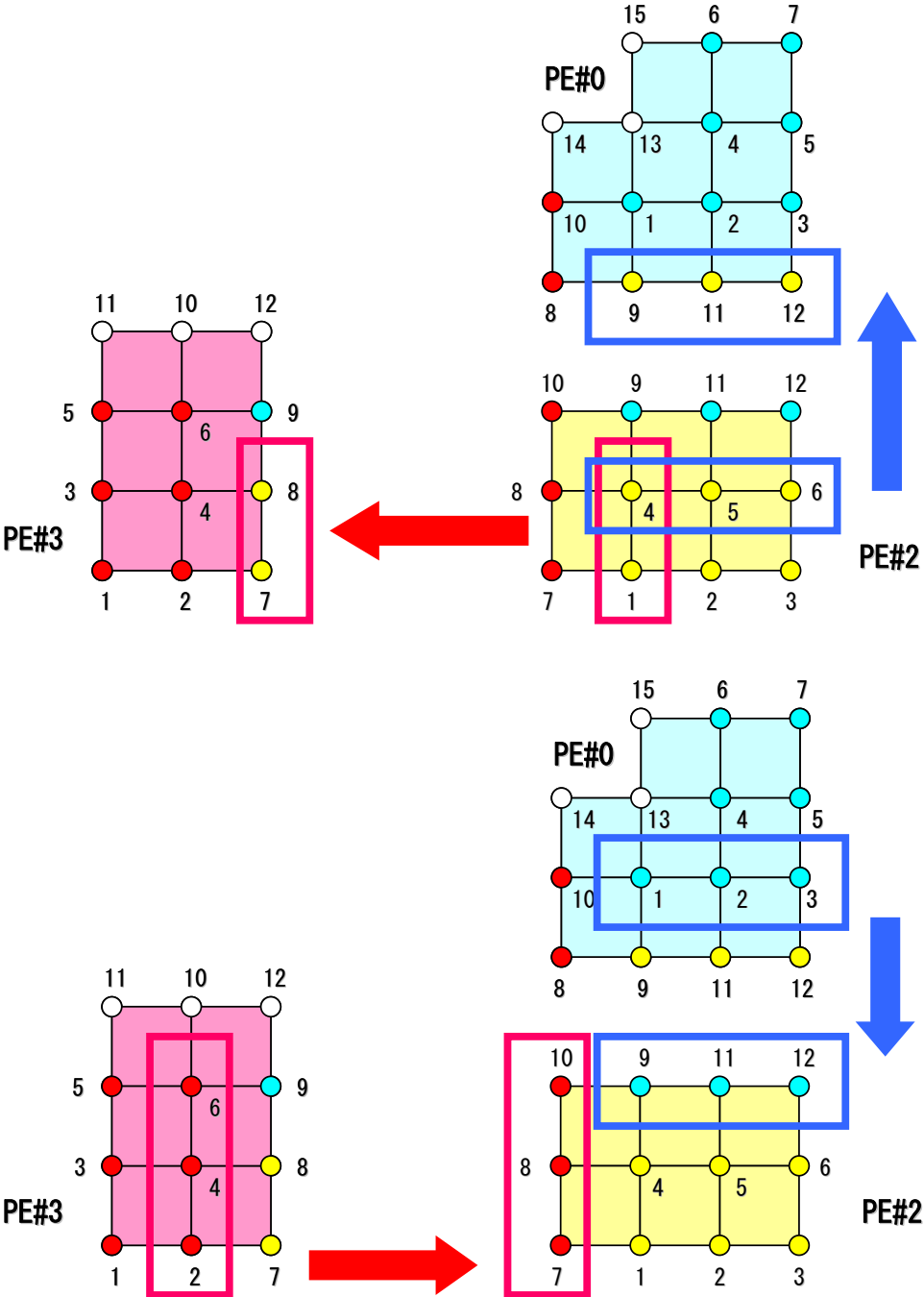
PE-to-PE comm. : Local Data



	領域ID	隣接領域数	隣接領域
(中略)	2	2	0
	2	3	6
	3	7	3
	8	8	3
	10	10	3
	9	11	0
	12	12	0
	2	2	0
	1	1	5
	4	4	
	4	5	
	5	6	

NEIBPE= 2
NEIBPE[0]=3, NEIBPE[1]= 0

PE-to-PE comm. : SEND



(中略)

2	
2	
3	0
3	6
7	3
8	3
10	3
9	0
11	0
12	0
2	5
1	
4	
4	
5	
6	

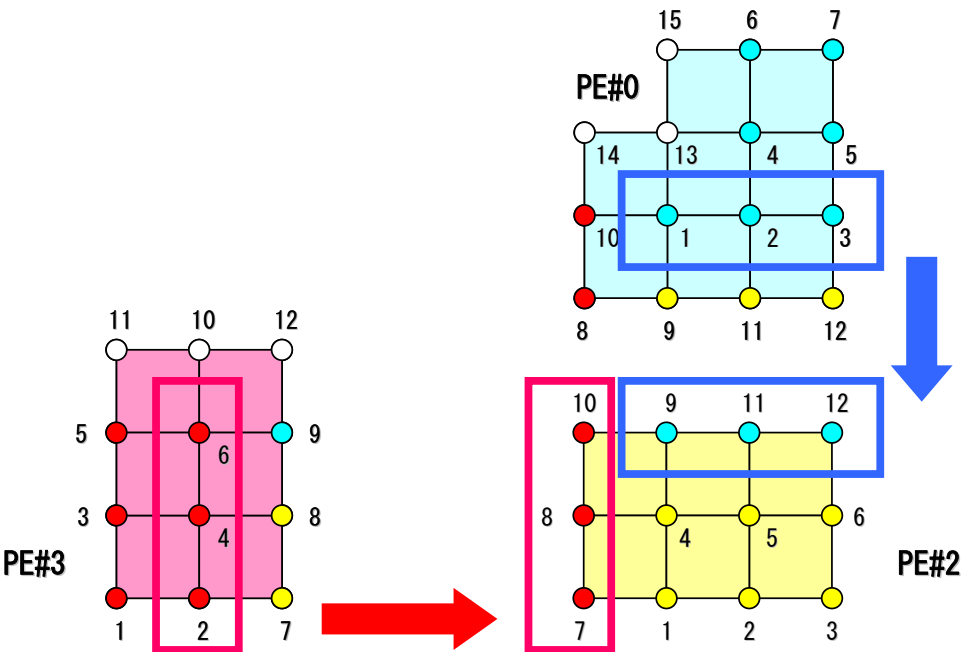
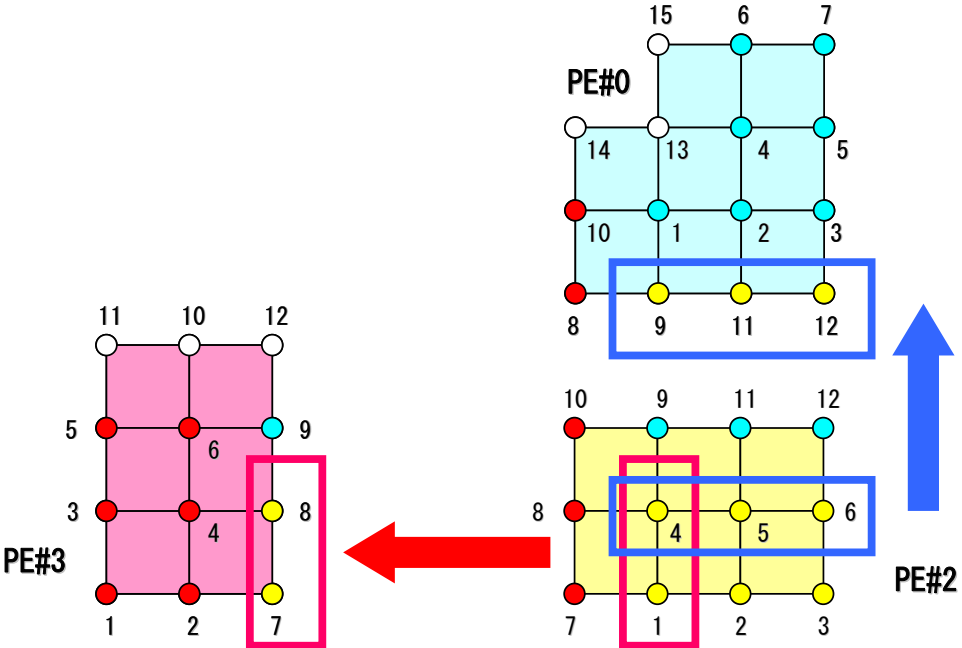
export_index

```
export_index[0]= 0
export_index[1]= 2
export_index[2]= 2+3 = 5

export_item[0-4]=1,4,4,5,6
```

4番の節点は2つの領域に送られる

PE-to-PE comm. : RECV



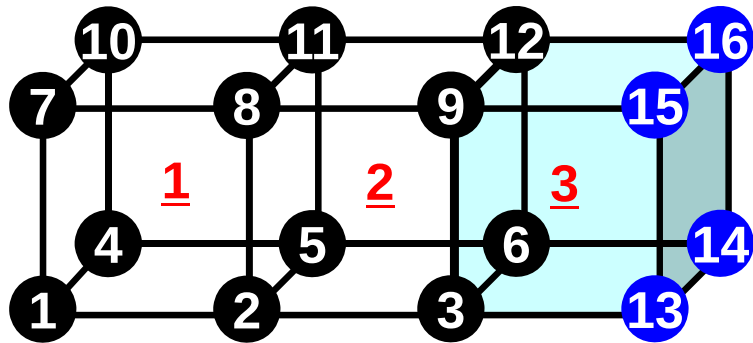
```
(中略)
2
2
3
0
3
7
8
10
9
11
12
2
1
4
4
5
6
6
3
import_index
3
3
3
0
0
0
5
```

```
import_index[0]= 0
import_index[1]= 3
import_index[2]= 3+3 = 6

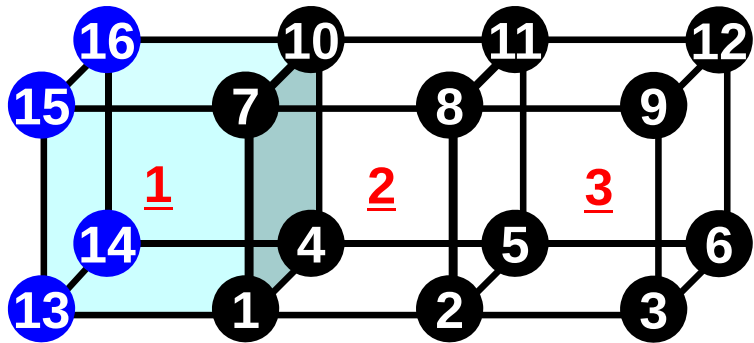
import_item[0-5]=7,8,10,9,11,12
```


節点グループ

aaa.1



aaa.0



4							
4	12	20	28				
Xmin							
1	4	7	10				
Ymin							
1	2	3	13	7	8	9	15
Zmin							
1	2	3	13	4	5	6	14
Zmax							
7	8	9	15	10	11	12	16

4							
0	8	16	24				
Xmin							
Ymin							
13	1	2	3	15	7	8	9
Zmin							
13	1	2	3	14	4	5	6
Zmax							
15	7	8	9	16	10	11	12

- aaa.0
 - Xminに属する節点が無いため，節点数が「0」となっている